Electromagnétisme Année 2009-2010 DM 4

1. (4pts) **Force de Lorentz -** Un proton voyage dans un champ magnétique uniforme avec un angle $\alpha = 45°$ par rapport au champ. La vitesse vaut 10^7 m/s et le champ a 1,48 T. Calculer

   (a) le rayon de l'hélice. A.N.

$$v_\perp = v_0 \sin 45° = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} m_P \frac{v_\perp^2}{R_L} &= q_e v_\perp B \\ m_P &= 1,67 \times 10^{-27}\text{kg} \\ R_L &= \frac{m_P v_\perp}{q_e B} \simeq \frac{1,67 \times 10^{-27}}{1,6 \times 10^{-19} \times 1,5} \frac{10^7}{\sqrt{2}} \simeq 5\text{cm} \end{aligned}$$

   (b) la fréquence ν de rotation. A.N.

$$f = \frac{v_\perp}{2\pi R_L} = \frac{10^7}{\sqrt{2} \times 2\pi \times 5 \times 10^{-2}} \simeq 2.25 \times 10^7$$

$$\omega = 2\pi f = 1.41 \times 10^8$$

   (c) la distance D d'avance par rotation. A.N.

2. (4pts) **Résistance -** Considérer un câble co-axial de longueur L. Le cylindre intérieur a un rayon a, la gaine un rayon intérieur b et un rayon extérieur c, ($a < b < c$). On fait un court-circuit à une extrémité du câble. Si la conductivité des conducteurs est γ quelle est la résistance pour un courant qui part à l'intérieur du câble et revient à l'extérieur ?

$$dR = \frac{\gamma dl}{S}$$

   Donc pour le cable coaxial on a donc une résistance de :

$$R = \frac{\gamma L}{\pi \left(c^2 - b^2\right)} + \frac{\gamma L}{\pi a^2}$$

3. (4pts) **Champ magnétique d'un câble coaxial :** Le câble coaxial du problème précédent est parcouru dans chacun de ses éléments par des courants de même intensité I mais de sens contraires. Calculer le champ magnétique partout dans l'espace en négligeant l'épaisseur de la gaine.En utilisant le théorème d'Ampère, on obtient pour un fil de rayon a parcouru par un courant uniforme I, un champ magnétique

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = B_\phi(\rho)\,\widehat{\phi} \quad \text{et} \quad \oint \overrightarrow{\mathbf{B}} \,.\, \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\text{enl}} \quad \Rightarrow 2\pi\rho B_\phi = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

$$\rho \leq a \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}_1(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\widehat{\phi}$$

$$\rho \geq a \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}_1(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}\widehat{\phi}$$

On obtient pour un fil creux de rayon intérieur b et de rayon extérieur c, et de courant $-I$

$$\rho \leq b \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}_2(\rho) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

$$b \leq \rho \leq c \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}_2(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2-b^2)}\frac{b^2-\rho^2}{\rho}\widehat{\phi}$$

$$\rho \geq b \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}_2(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\widehat{\phi}$$

Le champ magnétique du câble coaxial est la superposition de $\overrightarrow{\mathbf{B}}_1$ et de $\overrightarrow{\mathbf{B}}_2$ des deux fils $\overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{B}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{B}}_2$

$$\rho \leq a \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\widehat{\phi}$$

$$a \leq \rho \geq b \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\widehat{\phi}$$

$$b \leq \rho \leq c \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{b^2-\rho^2}{(c^2-b^2)\rho} + \frac{1}{\rho}\right]\widehat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{c^2-\rho^2}{(c^2-b^2)\rho}\right]\widehat{\phi}$$

$$b \geq c \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\rho) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

Dans la limite d'un gaine infiniment mince

$$\rho \leq a \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\widehat{\phi}$$

$$a \leq \rho \geq b \qquad \overrightarrow{\mathbf{B}}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\widehat{\phi}$$

$$b \geq 0$$

Il a y a une discontontinuité dans la composante tangentielle du champ $\overrightarrow{\mathbf{B}}$

$$\widehat{\mathbf{n}} \wedge \left(\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{ext}} - \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{int}}\right) = \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{j}_s} = \mu_0 j_s \widehat{z}$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\widehat{\phi} \wedge \widehat{\rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\widehat{\mathbf{z}}$$

ce qui est en accord avec un courant surfacique de j_s

$$\overrightarrow{\mathbf{j}_s} = -\frac{I}{2\pi b}\widehat{\mathbf{z}}$$

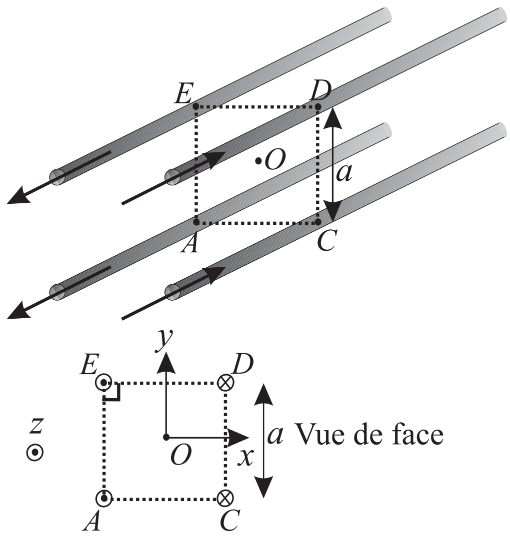
4. (4pts) **Ligne à quatre conducteurs**
   Quatre longs fils de cuivre sont disposés sur les arêtes d'un parallélépipède rectangle de section carrée et coté a. On établit dans chacun des conducteurs un courant d'intensité I dont le sens est donné par la figure.
   (a) Quel est le champ magnétique au centre, O, du carré $ACDE$?

$$\overrightarrow{B}_A(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\widehat{\phi}_A(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}\widehat{\phi}_A(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\sqrt{2}}{a}\widehat{\phi}_A(O)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\sqrt{2}}{a}\left(-\cos 45^\circ\widehat{\mathbf{x}} + \cos 45^\circ\widehat{\mathbf{y}}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\sqrt{2}}{a}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\mathbf{y}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(-\widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{y}}\right) \qquad \overrightarrow{B}_E(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(\widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{y}}\right)$$

$$\overrightarrow{B}_D(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(-\widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{y}}\right) \qquad \overrightarrow{B}_C(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(\widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{y}}\right)$$



Par principe de superposition, le champ magnétique au centre des quatre fils est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}(O) &= \overrightarrow{B}_A(O) + \overrightarrow{B}_E(O) + \overrightarrow{B}_D(O) + \overrightarrow{B}_C(O)\\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{4I}{a}\,\widehat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0 2I}{\pi a}\,\widehat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

(b) Quelle est la force (direction et intensité) agissant par unité de longueur sur le conducteur A ?Le champ créé en A par C est :

$$\overrightarrow{B}_C(A) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\,\widehat{\varphi}_C(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\,\widehat{\mathbf{y}}$$

Le champ créé en A par E est :

$$\overrightarrow{B}_E(A) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\,\widehat{\varphi}_E(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\,\widehat{\mathbf{x}}$$

Le champ créé en A par D est :

$$\begin{aligned}\rho &= \left(a^2 + a^2\right)^{1/2} = a\sqrt{2}\\ \overrightarrow{B}_D(A) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\,\widehat{\varphi}_D(O) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\mathbf{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\mathbf{y}}\right)\\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(-\frac{\widehat{\mathbf{x}}}{2} + \frac{\widehat{\mathbf{y}}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}(A) &= \overrightarrow{B}_D(A) + \overrightarrow{B}_E(A) + \overrightarrow{B}_C(A)\\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left[\left(-\frac{\widehat{\mathbf{x}}}{2} + \frac{\widehat{\mathbf{y}}}{2}\right) + \widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\mathbf{x}}\right]\\ &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\left(\frac{\widehat{\mathbf{x}}}{2} + \frac{3}{2}\widehat{\mathbf{y}}\right)\end{aligned}$$

On appelle $I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$ la force de Laplace exercée sur le fil. Donc la force par unité de longueuer est :

$$\frac{d\overrightarrow{F}}{dl} = I\widehat{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

avec

$$\widehat{dl} = \widehat{\mathbf{z}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{F}}{dl} &= I\widehat{\mathbf{z}} \wedge \overrightarrow{B} = I\widehat{\mathbf{z}} \wedge \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\ \left(\frac{\widehat{\mathbf{x}}}{2} + \frac{3}{2}\widehat{\mathbf{y}}\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I^2}{a}\widehat{\mathbf{z}} \wedge (\widehat{\mathbf{x}} + 3\widehat{\mathbf{y}}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I^2}{a}\,(\widehat{\mathbf{y}} - 3\widehat{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$