

1. Considérer le champ électrique $\vec{E} = c(2xz, x, z^2)$, c.-à-d. $\vec{E} = c(2xz\hat{u}_x + x^2\hat{u}_y + z^2\hat{u}_z)$:

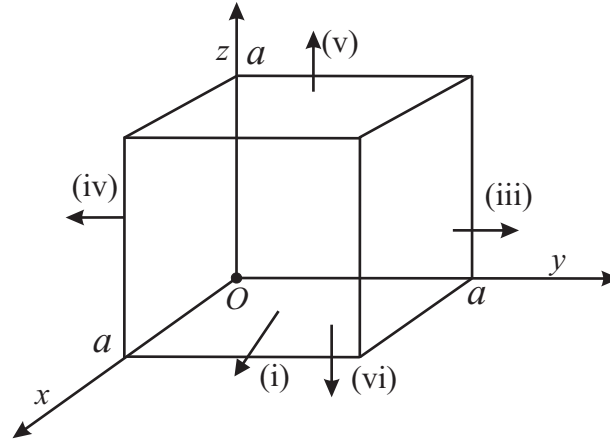


FIGURE 1 – cube de volume a^3 placé à l'origine

- (a) Calculer le flux sur un cube avec sommets $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$

$$(i) \quad \vec{dS}_i = dydz\hat{u}_x \quad x = a \quad \vec{E} = c(2az\hat{u}_x + a^2\hat{u}_y + z^2\hat{u}_z)$$

$$\Phi_i = \iint_{S_i} \vec{E} \cdot \vec{dS}_i = 2ca \int_0^a zdz \int_0^a dy = ca^4$$

$$(ii) \quad \vec{dS}_{ii} = -dydz\hat{u}_x \quad x = 0 \quad \vec{E} = cz^2\hat{u}_z$$

$$\Phi_{ii} = \iint_{S_{ii}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ii} = 0$$

$$(iii) \quad \vec{dS}_{iii} = dx dz \hat{u}_y \quad y = a \quad \vec{E} = c(2xz\hat{u}_x + x^2\hat{u}_y + z^2\hat{u}_z)$$

$$\Phi_{iii} = \iint_{S_{iii}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{iii} = \vec{E} = c \int_0^a dx \int_0^a dz x^2 = ca \int_0^a dx x^2 = c \frac{a^4}{3}$$

$$(iv) \quad \vec{dS}_{iv} = -dx dz \hat{u}_y \quad y = 0 \quad \vec{E} = c(2xz\hat{u}_x + x^2\hat{u}_y + z^2\hat{u}_z)$$

$$\Phi_{iv} = \iint_{S_{iv}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{iv} = -c \int_0^a dx \int_0^a dz x^2 = -ca \int_0^a dx x^2 = -c \frac{a^4}{3}$$

$$(v) \quad \vec{dS}_v = dx dy \hat{u}_z \quad z = a \quad \vec{E} = c(2xa\hat{u}_x + x^2\hat{u}_y + a^2\hat{u}_z)$$

$$\Phi_v = \iint_{S_v} \vec{E} \cdot \vec{dS}_v = \vec{E} = c \int_0^a dx \int_0^a dy a^2 = ca^4$$

$$(vi) \quad \vec{dS}_{vi} = -dxdy\hat{u}_z \quad z = 0 \quad \vec{E} = cx^2\hat{u}_y$$

$$\Phi_{vi} = \iint_{S_{vi}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{vi} = 0$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \Phi_i + \Phi_{ii} + \Phi_{iii} + \Phi_{iv} + \Phi_v + \Phi_{vi} = 2ca^4$$

(b) En déduire la charge Q_{int} à l'intérieur du cube.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = 2ca^4 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{int}} = 2\epsilon_0 ca^4$$

(c) Calculer la densité de charge $\rho(x, y, z)$.

$$\rho(x, y, z) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 4\epsilon_0 cz$$

(d) Intégrer la densité de charge $\rho(x, y, z)$ sur le volume du cube.

$$Q_{\text{int}} = \iiint_V \rho dV = 4\epsilon_0 c \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a dx z$$

$$= 4\epsilon_0 ca^2 \int_0^a dz z = 2\epsilon_0 ca^4$$

2. **Résistance** - Considérer un câble co-axial de longueur L . Le cylindre intérieur a un rayon a , la gaine un rayon intérieur b et un rayon extérieur c , ($a < b < c$). On fait un court-circuit à une extrémité du câble. Si la conductivité des conducteurs est γ quelle est la résistance pour un courant qui part à l'intérieur du câble et revient à l'extérieur ?

$$dR = \frac{\gamma dl}{S}$$

La section du fil à l'intérieur est πa^2 , La section de la gaine est $\pi(c^2 - b^2)$. Puisque la longueur du câble est l , le résistance du câble co-axial est :

$$R = \frac{\gamma L}{\pi(c^2 - b^2)} + \frac{\gamma L}{\pi a^2}$$

3. **Energie d'un système de charges ponctuelles.** On considère un système de charges ponctuelles, 2 positives, de valeur $+q$ et 3 négatives, de valeur $-q$, disposées aux sommets B, C, D, E et F d'un hexagone régulier de coté a .

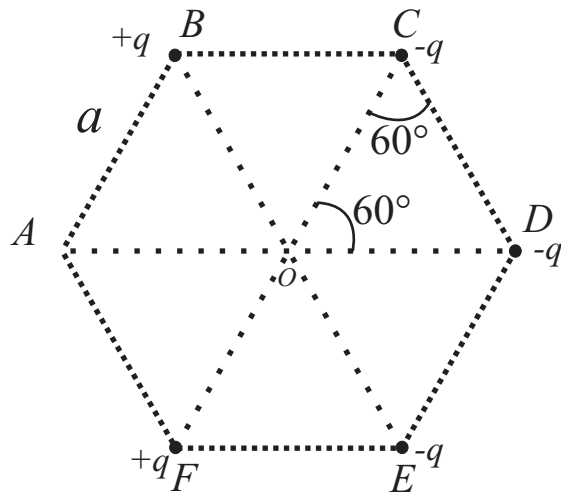


FIGURE 2 – Système de charges ponctuelles

- (a) Calculer le potentiel créé par l'ensemble des charges au point A (le sixième sommet de l'hexagone considéré).

$$\begin{aligned}
 V(A) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_B}{\|\vec{BA}\|} + \frac{q_C}{\|\vec{CA}\|} + \frac{q_D}{\|\vec{DA}\|} + \frac{q_E}{\|\vec{EA}\|} + \frac{q_F}{\|\vec{FA}\|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{BA}\|} + \frac{1}{\|\vec{FA}\|} - \frac{1}{\|\vec{CA}\|} - \frac{1}{\|\vec{EA}\|} - \frac{1}{\|\vec{DA}\|} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{(2 \sin 60^\circ a)} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

- (b) Quel est le travail nécessaire pour amener une autre charge positive, de valeur q , de l'infini jusqu'au point A ?

$$W_A = qV(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{3\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}$$

- (c) Etablir l'expression de l'énergie potentielle électrostatique du système de six charges ainsi constitué. Attention, on demande l'énergie totale de l'ensemble de charge et non l'énergie par charge!

On remarque d'abord que :

$$qV(B) = -qV(C) = -qV(E) = qV(F) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2a} \right)$$

$$qV(A) = -qV(D) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}$$

L'énergie électrique du système est alors :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 q_i V_i = \frac{1}{2} (4qV(B) + 2qV(A)) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left[-1 + \frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \right]$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{3-4\sqrt{3}}{6}$$

- (d) Calculer le moment dipolaire, \vec{p} , du système de six charges.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^6 q_i \vec{OP}_i = \sum_{i=1}^6 q_i \vec{OP}_i = q(\vec{OB} - \vec{OC}) + q(\vec{OF} - \vec{OE}) + q(\vec{OA} - \vec{OD})$$

$$= q\vec{CB} + q\vec{EF} + q(\vec{DA}) = q\frac{\vec{DA}}{2} + q\frac{\vec{DA}}{2} + q\vec{DA} = 2q\vec{DA} = 4qa \frac{\vec{DA}}{\|\vec{DA}\|}$$

$$\equiv 4qa \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} \equiv 4q\vec{OA}$$

4. On a traité en TD le champ électrique créé par un disque centré sur l'axe z , de rayon R , et de charge surfacique homogène σ . Si le centre du disque est à la position $z = a$, le champ électrique le long de son axe champ s'écrit (voir TD 2) :

$$\mathbf{E}(z) = E_z(z) \hat{z} \quad \text{avec} \quad E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{(R^2 + (z-a)^2)^{1/2}} \right) \quad (1)$$

On considère maintenant un cylindre diélectrique (féroélectrique) de rayon R et de longueur $L = 2a$ (le centre du cylindre est placé à l'origine et son axe est confondu avec l'axe Oz). Le cylindre est caractérisé par une polarisation permanent $\vec{P} = P\hat{z}$.

- (a) Utiliser le resultat de l'éq.(1) afin de calculer le calculer le champ électrique le long de l'axe du cylindre (indice : $\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ et $\rho_{\text{pol}} = -\text{div} \vec{P}$).

Au but du cylindre en $z = a$, il y a une charge surfacique de polarisation

$$\sigma_{\text{pol}}(z = a) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{z} = P$$

et sur le bout en $z = -a$, la charge surfacique est

$$\sigma_{\text{pol}}(z = -a) = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\vec{P} \cdot \hat{z} = -P$$

Le champ électrique sur l'axe z est donc la superposition des champs due à ces deux distributions de charge

$$E_z(z) = \frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z-a}{(R^2 + (z-a)^2)^{1/2}} \right) - \frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{z+a}{|z+a|} - \frac{z+a}{(R^2 + (z+a)^2)^{1/2}} \right) \quad (2)$$

$$= \frac{P}{2\epsilon_0} \left[\left(\frac{z-a}{|z-a|} - \frac{z+a}{|z+a|} \right) + \left(\frac{z+a}{(R^2 + (z+a)^2)^{1/2}} - \frac{z-a}{(R^2 + (z-a)^2)^{1/2}} \right) \right]$$

- (b) Spécifier la valeur et la position des discontinuités du champ $\vec{E}(z)$ le long de l'axe. Puisque $\frac{z-a}{|z-a|}$ a une discontinuité de 2 en $z = a$, et $\frac{z+a}{|z+a|}$ a une discontinuité de 2 en $z = -a$. Donc $E_z(z)$ a une discontinuité de $= \frac{P}{2\epsilon_0}$ en $z = a$.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [E_z(-a + \delta) - E_z(-a - \delta)] = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [E_z(a + \delta) - E_z(a - \delta)] = \frac{P}{\epsilon_0}$$

- (c) Calculer le champ de déplacement électrique $\vec{D}(z)$ le long de l'axe.

On peut décrire le fait que $\vec{P} = P\hat{z}$ à l'intérieur du cylindre et zéro à l'extérieur par

$$\vec{P} = \frac{P}{2} \left(\frac{z+a}{|z+a|} - \frac{z-a}{|z-a|} \right) \hat{z} \quad (3)$$

Par définition :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4)$$

- (d) Montrer que $D(z)$ est continue le long de l'axe z (Ceci est une conséquence de quelle loi fondamentale?).

Avec les éqs.(2) (3) et (4), on obtient pour le champ \vec{D} sur l'axe z , $\vec{D} = D_z(z) \hat{z}$:

$$D_z(z) = \frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{z+a}{(R^2 + (z+a)^2)^{1/2}} - \frac{z-a}{(R^2 + (z-a)^2)^{1/2}} \right)$$

qui est manifestement continue sur l'axe z . Ceci est une conséquence de la loi

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{free}}$$

qui donne à une interface entre deux milieux (dénote 1 et 2)

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right) \cdot \hat{n}_{12} = \sigma_{\text{free}}$$

ce qui impose le champ \vec{D} normale à l'interface soit continue puisque $\sigma_{\text{free}} = 0$ dans ce problème.