Electromagnétisme Année 2011-2012 DM 1

1. Opérateurs vectoriels.

   (a) Prenons un champ $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (3x + y^2)\,\widehat{\mathbf{x}} + (x - y^2)\,\widehat{\mathbf{y}}$. Trouver div $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{A}} = 3 - 2y$$

   (b) Prenons un champ $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y \cos ax)\,\widehat{\mathbf{x}} + (y + e^x)\,\widehat{\mathbf{z}}$. Trouver $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{A}}$ à l'origine.

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \widehat{\mathbf{x}} & \widehat{\mathbf{y}} & \widehat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y\cos ax & 0 & y + e^x \end{vmatrix} = \widehat{\mathbf{x}} - e^x\widehat{\mathbf{y}} - \cos ax\widehat{\mathbf{z}}$$

à l'origine $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{y}} - \widehat{\mathbf{z}}$

2. *Distribution surfacique de charge.* Un disque circulaire de rayon a est chargé sur une face avec une densité de charge surfacique σ. Calculer la charge totale portée par le disque dans les cas suivants :

   (a) $\sigma(\rho, \phi) = \sigma_0$, avec σ_0 une constante.

$$Q = \iint \sigma(\rho,\phi)\, d\mathcal{S} = \sigma_0 \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \pi a^2 \sigma_0$$

   (b) $\sigma(\rho, \phi) = \sigma_0 \frac{\rho}{a}$.

$$Q = \iint \sigma(\rho,\phi)\, d\mathcal{S} = \sigma_0 \int_0^a \frac{\rho}{a}\rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi\sigma_0}{a}\int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2\pi\sigma_0}{a}\left.\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a$$
$$= \frac{2\pi\sigma_0}{a}\frac{a^3}{3} = 2\pi\sigma_0\frac{a^2}{3}$$

   (c) $\sigma(\rho, \phi) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)$.

$$Q = \iint \sigma(\rho,\phi)\, d\mathcal{S} = \sigma_0 \int_0^a \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma_0 \int_0^a \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho$$
$$= 2\pi\sigma_0 a^2\left(1 - 2e^{-1}\right)$$

   où nous avons utilisé :

$$u = \rho \qquad dv = \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)d\rho$$
$$du = d\rho \qquad v = -a\exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)$$

$$d(uv) = duv + udv$$
$$udv = d(uv) - duv$$
$$\int_0^a \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho = -\left[\rho a \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)\right]_0^a + a\int_0^a \exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)d\rho$$
$$= -a^2e^{-1} - a^2\left[\exp\left(-\frac{\rho}{a}\right)\right]_0^a$$
$$= -a^2e^{-1} - a^2\left(e^{-1} - 1\right)$$
$$= a^2\left(1 - 2e^{-1}\right) \simeq a^2(1 - 0,736) = 0,264a^2$$

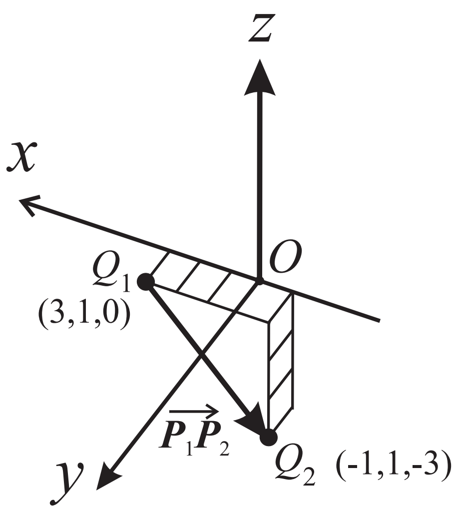
3. *Distribution linéique de charge* On a une distribution de charge linéique finie, $\lambda \neq 0$, pour $0 \leq l \leq l_0$, avec une densité de charge

$$\lambda(l) = \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{l}{l_0}\right)$$

   (a) Calculer la charge totale portée par la ligne.

$$Q_{\text{int}} = \int_0^{l_0} \lambda_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{l}{l_0}\right) dl = -\frac{2\lambda_0 l_0}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{l}{l_0}\right)\Bigg|_0^{l_0} = \frac{2\lambda_0 l_0}{\pi}$$

4. On place deux charges électriques ponctuelles, Q_1 et Q_2, respectivement aux positions $P_1 = (3, 1, 0)$m et $P_2 = (-1, 1, -3)$m.



   (a) Trouver la force sur Q_2.

$$\vec{\mathbf{F}}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\right\|}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2} = \vec{\mathbf{P}}_2 - \vec{\mathbf{P}}_1 = (-1, 1, -3) - (3, 1, 0) = (-4, 0, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\right\| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}\right\|} = \frac{(-4\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{z}})}{5}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{1\to2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{25}\frac{(-4\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{z}})}{5}$$

   (b) Trouver la force sur Q_1.

$$\vec{\mathbf{F}}_{2\to1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1}}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1}\right\|}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1} = -\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2} \Rightarrow \vec{\mathbf{F}}_{2\to1} = -\vec{\mathbf{F}}_{1\to2}$$

(c) A.N. Exprimer les résultats en Newtons, $Q_1 = 50\mu C$ et $Q_2 = 10\mu C$ ($\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$SI).

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{F}}_{1\to 2} &= 9 \times 10^9 \frac{5 \times 10^{-5} \times 10^{-5}}{25} \frac{(-4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{z}})}{5} \\
&= \frac{9}{5} \times 10^{-1} \frac{(-4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{z}})}{5} \\
&= 0.18 \frac{(-4\widehat{\mathbf{x}} - 3\widehat{\mathbf{z}})}{5} \mathrm{N}
\end{aligned}$$