Diffusion électromagnétique pour le Master Physique et Sciences de la Matière – notes de cours et travaux dirigés –

Gabriel SORIANO

20 juin 2012

Table des matières

I Diffusion élastique **2**
- I.1 Equations de MAXWELL . . . 2
- I.2 Puissance électromagnétique . . . 3
- I.3 Section efficace . . . 5

II Rayonnement **7**
- II.1 Potentiel . . . 7
- II.2 Champ lointain . . . 8
- II.3 Champ transverse . . . 9
- II.4 Polarisation . . . 10

III Diffusion de Rayleigh **12**
- III.1 Polarisabilité . . . 12
- III.2 Champ proche . . . 12
- III.3 Opérateur de diffusion . . . 13
- III.4 Section efficace . . . 14

IV Milieu diffusant **16**
- IV.1 Diffusion simple . . . 16
- IV.2 Diffusion aléatoire . . . 17
- IV.3 Atténuation . . . 18
- IV.4 Loi de mélange . . . 18

V Approximations **20**
- V.1 Diffusion de BORN . . . 20
- V.2 Approximation de KIRCHHOFF-plan tangent . . . 21
- V.3 Diffusion de RAYLEIGH . . . 21

VI Diffraction **23**
- VI.1 Théorie de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ . . . 23
- VI.2 Théorie de STRATTON-CHU . . . 25
- VI.3 Théorème Optique . . . 27
- VI.4 Réciprocité . . . 28

I Diffusion élastique

La présence d'obstacles ou d'inhomogénéités est une entrave à la propagation libre des ondes. On considère le processus de diffusion suivant : une source primaire de charges et de courants $(\rho,\mathbf{j})$ produit dans le vide un champ électromagnétique $(\mathbf{E}^i,\mathbf{H}^i)$, dit champ incident, qui est diffusé par un diffuseur (ou un ensemble de diffuseur) circonscrit au domaine borné $\mathcal{D}$. Le diffuseur est la source, dite secondaire, du champ diffusée $(\mathbf{E}^d,\mathbf{H}^d)$. La somme des champs incidents et diffusés est appelé champ total et noté tout simplement $(\mathbf{E},\mathbf{H})$.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^d \qquad\qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^d \tag{1}$$

Dans le problème direct de diffusion, le champ incident est supposé connu et le diffuseur caractérisé, et la grandeur recherchée est le champ diffusé. Dans le problème inverse, on cherche à caractériser un milieu diffusant à partir de la connaissance (mesure) des champs incident et diffusé.

I.1 Equations de Maxwell

Le champ total $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ vérifie les équations de MAXWELL avec sources :

$$\begin{aligned} &\mathbf{rot}\,\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} = \mathbf{0} \qquad\qquad &&\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{rot}\,\mathbf{H} - \partial_t\mathbf{E} = \mathbf{j} &&\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho \end{aligned} \tag{2}$$

Le second membre est constitué des sources primaires, et les champs $(\mathbf{D},\mathbf{B})$ modélisent la présence du diffuseur. En tout point du vide $\mathbf{r} \notin \mathcal{D}$, les relations constitutives valent simplement $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ et $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, et on retrouve en dehors du diffuseur les équations de MAXWELL dans le vide.

Exercice 1 *Vérifier que le jeu d'équations (2) est compatible avec la conservation de la charge électrique :*

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \partial_t\rho = 0 \tag{3}$$

Exercice 2 *Quelle force* $\mathbf{F}$ *le champ total* $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ *exerce-t'il sur une charge test* q *en un point* $\mathbf{r}$ *du vide et animée d'une vitesse* $\mathbf{v}$ *?*

Nous allons étudier la diffusion dans les milieux linéaires. cette diffusion est alors dite élastique : si le champ incident est monochromatique à la pulsation ω, alors le champ diffusé et donc le champ total battent eux aussi à la pulsation ω. On peut donc travailler en régime harmonique, sur les amplitudes complexes des sources et champs. On choisit une dépendance temporelle de la forme $e^{-i\omega t}$. Pour les sources par exemple :

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Re e(\rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \to \rho(\mathbf{r}) \in \mathbb{C} \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \Re e(\mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}) \to \mathbf{j}(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}^3 \qquad \partial_t \to -i\omega \tag{4}$$

Dans les équations de MAXWELL, aux dérivées partielles temporelles portant sur les grandeurs spatio-temporelles sont substituées un facteur $-i\omega$ portant sur les amplitudes complexes spatiales.

On se concentre dans la suite du cours sur un diffuseur diélectrique isotrope local et non magnétique, caractérisé par une permittivité électrique complexe relative $\varepsilon(\mathbf{r},\omega)$. Ce diffuseur est éventuellement inhomogène (dépendance de ε à la position $\mathbf{r} \in \mathcal{D}$), dispersif (dépendance de ε à la pulsation ω) et dissipatif ($\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ avec $\varepsilon'' > 0$). Les relations constitutives sont réduites à

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \qquad \varepsilon_r = 1 + \chi \qquad \chi(\mathbf{r} \notin \mathcal{D},\omega) = 0 \qquad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \tag{5}$$

et les deux équations de Maxwell harmoniques en rotationnel vérifiées en tout point par le champ total sont :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{j} \tag{6}$$

Exercice 3 *Montrer qu'il faut adjoindre l'équation harmonique de conservation de la charge*

$$\operatorname{div}\mathbf{j} - i\omega\rho = 0 \tag{7}$$

aux deux équations en rotationnel (6) pour retrouver les deux équations de Maxwell *en divergence.*

Le champ incident $(\mathbf{E}^i,\mathbf{H}^i)$ est défini comme le champ produit par les sources localisées $(\rho,\mathbf{j})$ en l'absence de diffuseur, c'est-à-dire dans le vide (ε_0,μ_0). Il vérifie donc les équations de Maxwell

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^i - i\omega\mu_0\mathbf{H}^i = \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{H}^i + i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}^i = \mathbf{j} \tag{8}$$

sur tout l'espace.

Maintenant, par définition, $\mathbf{E}^d = \mathbf{E} - \mathbf{E}^i$ et $\mathbf{H}^d = \mathbf{H} - \mathbf{H}^i$, en soustrayant (8) à (6), on trouve les équations de Maxwell vérifiées par le champ diffracté en tout point, que l'on peut mettre sous la forme :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^d - i\omega\mu_0\mathbf{H}^d = \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{rot}\,\mathbf{H}^d + i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}^d = -i\omega\varepsilon_0\chi\mathbf{E} \tag{9}$$

Ainsi, le champ diffracté vérifie les équations de Maxwell dans le vide (8), avec pour second membre/source un courant équivalent $\mathbf{j}_{eq} = -i\omega\varepsilon_0\chi\mathbf{E}$. Celui-ci est d'après (5) localisé au diffuseur $\mathcal{D}$, et dépend du champ interne, c'est-à-dire du champ total à l'intérieur du diffuseur.

I.2 Puissance électromagnétique

Repassons brièvement en régime variable.

Exercice 4 *Etablir à partir des équations temporelles (2) et de l'identité vectorielle* $\operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{H}$ *l'identité de* Poynting *:*

$$-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{B} + \mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{D} + \operatorname{div}\mathbf{P}\ [\mathrm{W/m^3}] \qquad\qquad \mathbf{P} = \mathbf{E}\wedge\mathbf{H}\ [\mathrm{W/m^2}] \tag{10}$$

Dans l'identité de Poynting, le terme $-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ correspond à la densité volumique de puissance fournie par le courant, $\mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{B}+\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{D}$ est la variation temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique, et le vecteur de Poynting s'identifie à la densité de flux de puissance électromagnétique.

Exercice 5 *Montrer qu'en régime harmonique à la pulsation ω, on peut définir à partir des amplitudes complexes du champ un vecteur de* Poynting *harmonique, mais réel*

$$\mathbf{P}=\Re e\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}^*}{2}\ [\mathrm{W/m^2}]$$

qui s'identifie à la moyenne temporelle sur une période $T=\frac{2\pi}{\omega}$ de la densité de flux de puissance électromagnétique.

Exercice 6 *Etablir à partir des équations harmoniques (6) et de l'identité vectorielle* $\operatorname{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}^*)=\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{H}^*$ *l'identité de* Poynting *harmonique :*

$$-\Re e\frac{\mathbf{j}^*\cdot\mathbf{E}}{2}=\frac{1}{2}\omega\varepsilon''|\mathbf{E}|^2+\operatorname{div}\mathbf{P}\ [\mathrm{W/m^3}]\qquad\mathbf{P}=\Re e\frac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}^*}{2}\ [\mathrm{W/m^2}]\tag{11}$$

En régime harmonique, la variation de la densité volumique d'énergie se réduit au terme $\frac{1}{2}\omega\varepsilon''|\mathbf{E}|^2$ qui rend compte de l'absorption dans le diélectrique dissipatif.

En intégrant l'identité de Poynting harmonique sur le volume $\mathcal{D}$ du diffuseur, en appliquant le théorème de la divergence et si les sources primaires sont extérieures au diffuseur, alors la puissance absorbée Φ^a par le diffuseur est égale et opposée au flux de puissance total sortant du diffuseur :

$$\Phi^a=\frac{1}{2}\omega\int_{\mathcal{D}}\varepsilon''|\mathbf{E}|^2d^3\mathbf{r}=-\oint_{\partial\mathcal{D}}\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS\geq 0\ [\mathrm{W}]\tag{12}$$

avec $\partial\mathcal{D}$ le bord du diffuseur et $\hat{\mathbf{n}}$ sa normale extérieure. La puissance abosrbée est nulle pour les diffuseurs transparents $\varepsilon''=0$, et strictement positive dans les milieux dissipatifs $\varepsilon''>0$.

Le champ incident vérifie lui les équations de Maxwell dans le vide à l'intérieur du diffuseur, donc pour peu que ses sources soient extérieures au diffuseur, on a immédiatement

$$\Phi^i=\oint_{\partial\mathcal{D}}\mathbf{P}^i\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=0\ [\mathrm{W}]\qquad\mathbf{P}^i=\Re e\frac{\mathbf{E}^i\wedge\mathbf{H}^{i*}}{2}\ [\mathrm{W/m^2}]\tag{13}$$

Pour le champ diffracté, on considère le domaine borné U extérieur à $\mathcal{D}$ et intérieur à la sphére centré sur le (centre du) diffuseur et de rayon $r>a$ le plus grand rayon du diffuseur. L'identité de Poynting (11) intégrée pour le champ diffusé sur U donne l'expression de la puissance diffusée :

$$\Phi^d=\oint_{\partial\mathcal{D}}\mathbf{P}^d\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\oint_{|\mathbf{r}|=r}\mathbf{P}^d\cdot\hat{\mathbf{r}}dS,\forall r>a\ [\mathrm{W}]\qquad\mathbf{P}^d=\Re e\frac{\mathbf{E}^d\wedge\mathbf{H}^{d*}}{2}\ [\mathrm{W/m^2}]\tag{14}$$

qui, dans le vide, se propage sans s'atténuer, et se conserve de sphère en sphère. Sur la sphère, la normale s'identifie au vecteur direction $\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}/r$, et l'élément de surface est relié $dS=r^2d\Omega$.

On montrera par la suite que l'élément de flux par élément d'angle solide $r^2\mathbf{P}^d\cdot\hat{\mathbf{r}}$ est de limite finie lorsque $r\to\infty$, et cette limite correspond à la définition classique de l'intensité diffusée :

$$I^d(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r\to\infty} r^2\mathbf{P}^d(r\hat{\mathbf{r}})\cdot\hat{\mathbf{r}}\ [\mathrm{W/sr}] \qquad \Phi^d = \oint_{4\pi} I^d(\hat{\mathbf{r}})d\Omega\ [\mathrm{W}] \tag{15}$$

La direction $\hat{\mathbf{r}}$ peut être repérée par deux angles, par exemple les angles sphériques (θ,ϕ) :

$$\hat{\mathbf{r}} = \left|\begin{array}{l}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{array}\right.$$

I.3 Section efficace

En Optique géométrique ou théorie des rayons, les diffuseurs sont caractérisés par leur section efficace géométrique σ^g pour une direction donnée : c'est l'aire de l'*ombre* du diffuseur éclairé par un faisceau de lumière parallèle dans la direction considéré sur un écran placé perpendiculairement au faisceau. Ainsi une sphère de rayon r a une section efficace géométrique de $\sigma^g = \pi r^2$ dans toutes les directions, et pour un objet plan d'aire A et dont la normale fait un angle θ avec le faisceau, $\sigma^g = A|\cos\theta|$. L'unité de la section efficace est bien entendu le mètre carré. En physique nucléaire et en physique des particules, la section efficace est reliée à la probabilité d'interaction entre particules.

Lorsque la source primaire est d'extension limitée et à distance très grande devant la dimension caractéristique a du diffuseur, le vecteur de Poynting incident varie peu d'un point à l'autre du diffuseur. On peut alors définir, en comparant la puissance absorbée Φ^a ou diffusée Φ^d en W et la norme du vecteur de Poynting du champ incident $|\mathbf{P}^i|$ en W/m^2, une section efficace d'absorption σ^a ou de diffusion σ^s :

$$\mathbf{P}^i = |\mathbf{P}^i|\hat{\mathbf{r}}_\mathbf{i} \qquad \sigma^a(\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{\Phi^a}{|\mathbf{P}^i|}\ [\mathrm{m}^2] \qquad \sigma^d(\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{\Phi^d}{|\mathbf{P}^i|}\ [\mathrm{m}^2] \tag{16}$$

Ces sections efficaces sont fonctions de la direction source-diffuseur $\hat{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$ qui est aussi la direction du vecteur de Poynting incident.

Si on se rappelle que la puissance diffusée est l'intégrale sur 4π steradians de l'intensité diffusée, on introduit la section efficace bistatique de diffusion σ^b :

$$\sigma^b(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) = 4\pi\frac{I^d(\hat{\mathbf{r}}_d)}{|\mathbf{P}^i|} = \lim_{r\to\infty}\frac{4\pi|r^2\mathbf{P}^d\cdot\hat{\mathbf{r}}_d|}{|\mathbf{P}^i|}\ [\mathrm{m}^2] \qquad \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\sigma^b(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)d\Omega_d = \sigma^d(\hat{\mathbf{r}}_i)\ [\mathrm{m}^2] \tag{17}$$

qui dépend des deux directions incidente et diffusée. La surface équivalente radar ou section efficace rétrodiffusée (SER) notée σ^r est particulièrement importante :

$$\sigma^r(\hat{\mathbf{r}}_i) = \sigma^b(-\hat{\mathbf{r}}_i,\hat{\mathbf{r}}_i)\ [\mathrm{m}^2] \tag{18}$$

Une partie de la puissance incidente est donc diffusée et éventuellement absorbée. La section efficace totale est appelée section efficace d'extinction :

$$\sigma^e(\hat{\mathbf{r}}_i) = \sigma^s(\hat{\mathbf{r}}_i) + \sigma^a(\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{|\mathbf{P}^i|}\oint_{\partial\mathcal{D}}\mathbf{P}^e\cdot\hat{\mathbf{n}}dS\ [\mathrm{m}^2] \tag{19}$$

$$\mathbf{P}^e = -\Re e\frac{\mathbf{E}^i\wedge\mathbf{H}^{d*}+\mathbf{E}^d\wedge\mathbf{H}^{i*}}{2}\ [\mathrm{W/m}^2]$$

On peut directement définir cette section efficace d'extinction à partir d'un équivalent vecteur de Poynting noté $\mathbf{P}^e$.

Exercices

II Rayonnement

Le rayonnement à la pulsation ω est le problème du calcul du champ produit par un courant donné dans le vide. D'après les équations de Maxwell vues en section I.1, ce problème concerne (8) le champ incident ($\mathbf{E}^i$,$\mathbf{H}^i$) créé par le courant $\mathbf{j}$ bien sûr, mais aussi (9) le champ diffracté ($\mathbf{E}^d$,$\mathbf{H}^d$) produit par le courant équivalent $\mathbf{j}_{eq} = -i\omega\varepsilon_0\chi\mathbf{E}$.

II.1 Potentiel

Le champ électromagnétique temporel $(\mathbf{E},\mathbf{B})(\mathbf{r},t)$ dans le vide $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ est lié aux sources $(\rho,\mathbf{j})(\mathbf{r},t)$ par les équations de Maxwell

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{B} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{j} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

qui forment un jeu d'équations aux dérivées partielles (EDP) couplées, qu'on résoud habituellement à l'aide des potentiels.

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{21}$$

Ces potentiels sont reliés par la jauge de Lorenz, mais ils vérifient deux équations d'onde indépendantes.

$$\Delta V - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} \tag{22}$$

Les solutions élémentaires de l'équation d'onde sont les ondes sphériques temporelles convergente et divergente. Le potentiel physique est causal, il est constitué d'ondes se propageant depuis la source vers le point d'observation, et donc bâti sur la solution élémentaire causal de l'équation d'onde : l'onde sphérique temporelle.

En régime harmonique à la pulsation ω, les ondes sphériques convergente et divergente ont pour fonctions d'onde harmoniques respectivement $\frac{e^{-ik_0r}}{r}$ et $\frac{e^{+ik_0r}}{r}$ pour la dépendance temporelle $e^{-i\omega t}$. Les équations d'onde (22) deviennent des équations de Helmholtz

$$\Delta V + k_0^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Delta \mathbf{A} + k_0^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \tag{23}$$

où $k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ est le nombre d'onde du vide à la pulsation ω. $G_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_0r}}{r}$ est appelée fonction de Green du vide. A la limite basse-fréquence $\omega \to 0$, on doit retrouver les potentiels électrostatique et magnétostatique

$$V_S(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}' \qquad \mathbf{A}_S(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'$$

solutions de deux équations de Poisson. Les potentiels causaux à la pulsation ω suivent donc les expressions

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{j}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ik_0r}}{r} * \rho = \frac{G_0 * \rho}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0r}}{r} * \mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}G_0 * \mathbf{j} \tag{24}$$

qu'on peut mettre sous la forme de produits de convolution sur les trois variables d'espace.

A partir des potentiels, on remonte aux champs :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\,\mathbf{A} \tag{25}$$

$$\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A} - \mathbf{grad}\,V = \frac{i}{\omega\varepsilon_0}(\mathbf{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{j}) = i\omega(\mathbf{A} + \frac{1}{k_0^2}\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}) \tag{26}$$

II.2 Champ lointain

La fonction de Green du vide $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ correspond à la fonction d'onde d'une onde sphérique émise au point $\mathbf{r}'$ et observée en $\mathbf{r}$. Considérons le cas d'un point d'observation $\mathbf{r}$ proche de l'origine O du repère et d'un point source $\mathbf{r}'$ lointain. L'onde sphérique est présente une structure d'onde plane au voisinage de O, avec un vecteur d'onde $-k_0\hat{\mathbf{r}}'$ où $r' = |\mathbf{r}'|$ est la distance source-origine et $\hat{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}'/r'$ le vecteur unitaire pointant la direction origine-source. En conséquence de quoi, $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \simeq G_0(-\mathbf{r}')e^{-ik_0\hat{\mathbf{r}}'\cdot\mathbf{r}}$. Les points source et d'observation jouant des rôles symétriques, on peut les intervertir pour trouver $G_0(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \simeq G_0(-\mathbf{r})e^{-ik_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}$. Par symétrie toujours, on obtient finalement pour une source proche de O et une observation lointaine $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \simeq G_0(\mathbf{r})e^{-ik_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}$.

Exercice 7 *Montrer que la distance d'interation* $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ *entre un point source* $\mathbf{r}'$ *et un point d'observation* $\mathbf{r}$ *vérifie*

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}(1 + O(r'/r)) \qquad e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = e^{ik_0(r-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')}(1 + O(k_0r'^2/r))$$

avec $r = |\mathbf{r}|$ *et* $r' = |\mathbf{r}'|$.

On considére à partir de maintenant que les sources du champ sont à support sur la sphère de centre O l'origine du repère et de rayon a. Ainsi, pour tout point source $\mathbf{r}'$ est vérifié $r' \leq a$, d'où

$$r \gg a, r \gg k_0a^2 \qquad G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \sim \frac{e^{ik_0r}}{r}e^{-k_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} = G(\mathbf{r})e^{-k_0\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} \tag{27}$$

Parmi les deux conditions de champ lointain $r \gg a$ et $r \gg k_0a^2 = 2\pi a^2/\lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide à la pulsation ω, la seconde est la plus importante, car elle porte sur la phase de la fonction de Green.

Ainsi en champ lointain, l'expression des potentiels

$$V(\mathbf{r}) \sim \frac{e^{ik_0r}}{4\pi\varepsilon_0 r}\tilde{\rho}(k_0\hat{\mathbf{r}}) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r}) \sim \frac{\mu_0 e^{ik_0r}}{4\pi r}\tilde{\mathbf{j}}(k_0\hat{\mathbf{r}}) \tag{28}$$

fait intervenir la transformée de Fourier sur les trois variables d'espace des sources

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int \rho(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}d^3\mathbf{r}' \qquad \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}d^3\mathbf{r}' \tag{29}$$

pour la variable de Fourier $\mathbf{k} = k_0\hat{\mathbf{r}}$.

Exercice 8 *Montrer qu'en champ lointain et avec la condition supplémentaire* $k_0 r \gg 1$,

$$\mathbf{grad}\, V \sim ik_0 V \hat{\mathbf{r}} \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{A} \sim ik_0 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \qquad \mathbf{rot}\, \mathbf{A} \sim ik_0 \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{A} \tag{30}$$

Exercice 9 *Montrer que le potentiel scalaire* V *vérifie en champ lointain la condition de* Sommerfeld *:*

$$\lim_{r\to\infty} \left(r\frac{\partial V}{\partial r}(\mathbf{r}) - ik_0 r V(\mathbf{r}) \right) = 0 \tag{31}$$

II.3 Champ transverse

En conditions de champ lointain, les potentiels ont la forme d'ondes sphérique, et donc localement une structure d'onde plane. Le vecteur d'onde est donné par $k_0\hat{\mathbf{r}}$ et pointe donc la direction d'observation $\hat{\mathbf{r}}$. Un vecteur colinéaire à cette direction est dit longitudinal, et un vecteur qui lui est orthogonal est dit transverse. D'après (25), $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\, \mathbf{A} \sim \frac{ik_0}{\mu_0}\hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{A}$ ce qui assure la transversalité du champ magnétique. Parmi les nombreuses expressions (26), si $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A} - \mathbf{grad}\, V$ n'est pas très explicite, les deux autres $\mathbf{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon_0}(\mathbf{rot}\, \mathbf{H} - \mathbf{j})$ et $\mathbf{E} = i\omega(\mathbf{A} + \frac{1}{k_0^2}\mathbf{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{A})$ montrent de manière patente la transversalité du champ électrique. On retrouve la structure de l'onde plane.

On définit pour un vecteur $\mathbf{j}$ la composante radiale j_r ou longitudinale d'un vecteur et sa composante transverse $\mathbf{j}_\perp$:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\perp + j_r\hat{\mathbf{r}} \qquad j_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{j} \qquad \mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - j_r\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \wedge (\mathbf{j} \wedge \hat{\mathbf{r}}) \tag{32}$$

Les champs électrique et magnétique lointains s'expriment tous deux en fonction de la composante tangentielle de la transformée de Fourier du courant :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim \eta_0 \frac{ik_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\tilde{\mathbf{j}}_\perp(k_0\hat{\mathbf{r}}) \sim \eta_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \wedge \hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}) \sim \frac{ik_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\hat{\mathbf{r}} \wedge \tilde{\mathbf{j}}_\perp(k_0\hat{\mathbf{r}}) \sim \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})/\eta_0 \tag{33}$$

où $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \simeq 120\pi \simeq 377\Omega$ est l'impédance caractéristique du vide.

Exercice 10 *Montrer que le champ électromagnétique* $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ *rayonné par un courant harmonique* $\mathbf{j}$ *à support borné vérifie la condition de* Silver-Muller *:*

$$\lim_{r\to\infty} (\eta_0 \mathbf{r} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}) + r\mathbf{E}(\mathbf{r})) = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} (\eta_0 r\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})) = 0 \tag{34}$$

Le vecteur de Poynting en champ lointain est longitudinal

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \Re e\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*}{2} \sim \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta_0}\hat{\mathbf{r}} \sim \frac{\eta_0|\mathbf{H}|^2}{2}\hat{\mathbf{r}} \sim \frac{\eta_0/8}{\lambda_0^2 r^2}|\tilde{\mathbf{j}}_\perp(k_0\hat{\mathbf{r}})|^2\hat{\mathbf{r}} \tag{35}$$

$$I(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r\to\infty} r^2\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{|r\mathbf{E}|^2}{2\eta_0} = \lim_{r\to\infty} \frac{\eta_0|r\mathbf{H}|^2}{2} = \frac{\eta_0/8}{\lambda_0^2}|\tilde{\mathbf{j}}_\perp(k_0\hat{\mathbf{r}})|^2 \tag{36}$$

et l'intensité s'en déduit facilement.

II.4 Polarisation

Le plan normal à la direction de propagation $\hat{\mathbf{r}}$ est appelé plan de polarisation, et les champs électrique et magnétiques lointains sont contenus dans ce plan, en partie réelle comme en partie imaginaire. En conséquence de quoi les champs électrique et magnétique n'ont chacun que deux composantes indépendantes, notées pour le champ électrique E_1 et E_2. Dans une base orthonormale réelle ($\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$) du plan de polarisation pour la direction $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{u}_2^2 = 1 \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \qquad \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{r}}$$

ces composantes vérifient :

$$E_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{E} = |E_1| e^{i\varphi_1} \qquad E_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{E} = |E_1| e^{i\varphi_2} \qquad \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2} = |\mathbf{E}| \tag{37}$$

La polarisation est définie comme la direction du champ électrique : $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}| \in \mathbb{C}^3$:

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}| = \hat{E}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{E}_2 \mathbf{u}_2 \qquad \hat{E}_1 = E_1/|\mathbf{E}| = |\hat{E}_1| e^{i\varphi_1} \qquad \hat{E}_2 = E_2/|\mathbf{E}| = |\hat{E}_2| e^{i\varphi_2} \tag{38}$$

Elle est dite
- rectiligne si $\varphi_1 = \varphi_2[\pi]$,
- circulaire si $|\hat{E}_1| = |\hat{E}_2|$ et $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$,
- elliptique dans le cas général.

En Optique, on représente la polarisation par le vecteur de Jones $\mathbf{V}$:

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = e^{i\varphi_1} \mathbf{V} \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} |\hat{E}_1| \\ |\hat{E}_2| e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Problème 1 *La mesure de la polarisation en Optique est appelée ellipsométrie. Présenter les grandeurs d'intérêt et les principales applications.*

Exercices

Exercice 11 *Retrouver les lois de* Lenz-Faraday, Ampère *et* Gauss *en appliquant les théorèmes de* Stokes *et* Green-Ostrogradski *aux équations de* Maxwell *(20).*

Exercice 12 *Montrer que les équations de* Maxwell *(20) sont compatibles avec l'équation de conservation de la charge :*

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{40}$$

Quel théorème permet d'intervertir les dérivées partielles en temps et en espace, et sous quelles hypothèses ?

Exercice 13 *Montrer que les potentiels (21) ne sont pas définis de manière unique.*

Exercice 14 *Retrouver les équations d'onde (22) à partir de (20) et (21) .*

Exercice 15 *Calculer le laplacien de* $\frac{1}{r}$ *pour* $r > 0$ *à l'aide de la formule du laplacien d'une fonction radiale* $\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\left(r^2 f'(r)\right)'$.

Exercice 16 *Calculer* $\Delta\frac{1}{r} = \operatorname{div}\mathbf{grad}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *en dehors de l'origine.*

Exercice 17 *Calculer l'intégrale de* $\Delta\frac{1}{4\pi r}$ *sur la sphère centrée sur l'origine et de rayon* $R > 0$ *à l'aide du théorème de la divergence.*

Problème 2 *Montrer que le laplacien de* $G_a = \frac{1}{4\pi r_a}$ *avec* $r_a = \sqrt{r^2 + a^2}$ *vaut*

$$\Delta G_a = -\frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3}\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-5/2} = -\delta_a(\mathbf{r})$$

et vérifier que δ_a *est à intégrale sur l'espace unité. Etudier la limite* $a \to 0$.

Exercice 18 *Sous quelle condition* $Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ *est solution homogène de l'équation de* HELMHOLTZ *?*

Exercice 19 *Calculer la vitesse de phase des surfaces d'onde de ces deux ondes sphériques.*

III Diffusion de Rayleigh

Considérons un diffuseur homogène $\mathcal{D}$, de dimension caractéristique a et de contraste $\chi = \varepsilon_r - 1 > 0$. Pour l'instant et par simplicité, ce diffuseur est supposé centré sur l'origine O du repère. La longueur d'onde électromagnétique dans le diffuseur est $\lambda_{\mathcal{D}} = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}$, inférieure à la longueur d'onde dans le vide.

III.1 Polarisabilité

Si la pulsation ω est suffisamment basse ou le diffuseur suffisamment petit pour que

$$a \ll \lambda_{\mathcal{D}} < \lambda_0 \tag{41}$$

alors

- la fonction de Green varie aussi très peu sur $\mathcal{D}$, pourvu que le point d'observation $\mathbf{r}$ ne soit pas placé au voisinage immédiat du diffuseur, sans pour autant être en champ lointain : on suppose $r \gg a$ sans que nécessairement $r \gg \lambda_0$.

$$\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{e^{k_0 r}}{r} \Rightarrow \mathbf{A}^d(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\int \mathbf{j}_{eq}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\varepsilon_0\chi\int_{\mathcal{D}}\mathbf{E}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

- le champ intérieur au diffuseur *n'a pas la place de varier beaucoup* d'un coté du diffuseur à l'autre, et peut être supposé constant, d'où

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}' \in \mathcal{D}) = \mathbf{E}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}_{\mathcal{D}} \Rightarrow \mathbf{A}^d(\mathbf{r}) \simeq \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\varepsilon_0\chi v_{\mathcal{D}}\mathbf{E}_{\mathcal{D}}$$

  avec $v_{\mathcal{D}}$ le volume du diffuseur.
- Ce champ interne est linéairement relié au champ incident sur le diffuseur $\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}} = \mathbf{E}^i(\mathbf{0})$. On définit la polarisabilité α [m^3] du diffuseur à partir de

$$\varepsilon_0\chi v_{\mathcal{D}}\mathbf{E}_{\mathcal{D}} = \alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}} \Rightarrow \mathbf{A}^d(\mathbf{r}) \simeq \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}} \tag{42}$$

La polarisabilité est dans le cas général un tenseur symétrique d'ordre 2, mais pour les diffuseurs de forme sphérique ou cubique, elle se ramène à un scalaire.

III.2 Champ proche

Dans la région $a \ll r \ll \lambda_0$, le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ retrouve une forme statique

$$\mathbf{A}^d(\mathbf{r}) \simeq \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi r}\alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}} \tag{43}$$

même si le potentiel temporel $\mathbf{A}^d(\mathbf{r},t)$ continue à osciller à la pulsation ω. Cette région est appelée champ proche ou champ statique.

Si le potentiel vecteur $\mathbf{A}^d$ est en $1/r$, alors le champ magnétique proche $\mathbf{H}^d = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{rot}\,\mathbf{A}^d$ et le potentiel scalaire $V^d = \frac{-i}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\mathrm{div}\,\mathbf{A}^d$ sont en $1/r^2$ et finalement, le terme électrostatique

$-\mathbf{grad}\,V^d$ du champ électrique $\mathbf{E}^d = i\omega\mathbf{A}^d - \mathbf{grad}\,V^d$ est en $1/r^3$. C'est ce terme qui domine en champ proche.

$$V^d = \frac{-i}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\mathrm{div}\,\mathbf{A}^d \simeq \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{div}\,\frac{\alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}}}{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{44}$$

On reconnait le potentiel d'un dipôle électrostatique de moment $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}}$. Attention, ce moment est un vecteur complexe. On donne l'expression du champ électrique associé :

$$\mathbf{E}^d \sim -\mathbf{grad}\,V^d = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}) - \mathbf{grad}\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{3p_r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{45}$$

et de ses composantes longitudinales et transverses :

$$E^d_r \sim 2\frac{p_r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \mathbf{E}^d_\perp \sim -\frac{\mathbf{p}_\perp}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}} = p_r\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{p}_\perp$$

On conclut que les interactions électromagnétiques à courte distance sont de nature essentiellement électrostatique.

On résoud donc le problème de la polarisation d'une sphère diélectrique dans un contexte électrostatique. Le champ incident $\mathbf{E}^i = E^i\hat{\mathbf{z}}$ est uniforme au voisinage de la sphère, le champ interne $\mathbf{E} = \frac{\alpha E^i}{\varepsilon_0\chi v_{\mathcal{D}}}\hat{\mathbf{z}}$ est donc lui aussi uniforme. Le champ externe s'écrit $\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^d$, le champ diffusé par la sphère étant donné par (45). La polarisabilité α de la sphère est telle que les conditions de passage sur la surface de la sphère soient respectées :

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}^i_\perp + \mathbf{E}^d_\perp \qquad\qquad \varepsilon_r E_r = E^i_r + E^d_r \tag{46}$$

On note que le problème est invariant par rotation autour de l'axe $\hat{\mathbf{z}}$. On trouve facilement :

$$\alpha = 4\pi a^3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \tag{47}$$

III.3 Opérateur de diffusion

Pour le champ lointain, on peut directement utiliser les résultats du chapitre II, avec pour un diffuseur de Rayleigh :

$$\tilde{\mathbf{j}}^{eq}_\perp(k_0\hat{\mathbf{r}}) \simeq -i\omega\varepsilon_0\mathbf{p}_\perp \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim \frac{\pi}{\lambda_0^2}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\mathbf{p}_\perp \qquad\qquad \mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}^i_{\mathcal{D}} \tag{48}$$

Si maintenant le champ incident est une onde plane $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = (E^i_1\mathbf{u}^i_1 + E^i_2\mathbf{u}^i_2)e^{ik_0\hat{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}}$, alors les composantes E^d_1 et E^d_2 du champ lointain se mettent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} E^d_1 \\ E^d_2 \end{bmatrix}(\mathbf{r}) \sim \frac{e^{ik_0 r}}{r}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_i)\begin{bmatrix} E^i_1 \\ E^i_2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

où $[S](\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)$ est la matrice de diffusion du diffuseur, fonction des directions incidente $\hat{\mathbf{r}}_i$ et diffusée $\hat{\mathbf{r}}_d$. Elle est indépendante de la distance de la distance d'observation, mais dépend des bases incidentes $(\mathbf{u}^i_1,\mathbf{u}^i_2)(\hat{\mathbf{r}}_i)$ et $(\mathbf{u}^d_1,\mathbf{u}^d_2)(\hat{\mathbf{r}}_d)$ utilisées. Pour un diffuseur de Rayleigh en O, cette matrice vaut

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{\pi}{\lambda_0^2}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^d_1\,\alpha\,\mathbf{u}^i_1 & \mathbf{u}^d_1\,\alpha\,\mathbf{u}^i_2 \\ \mathbf{u}^d_2\,\alpha\,\mathbf{u}^i_1 & \mathbf{u}^d_2\,\alpha\,\mathbf{u}^i_2 \end{bmatrix} = \frac{\pi\alpha}{\lambda_0^2}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^d_1\cdot\mathbf{u}^i_1 & \mathbf{u}^d_1\cdot\mathbf{u}^i_2 \\ \mathbf{u}^d_2\cdot\mathbf{u}^i_1 & \mathbf{u}^d_2\cdot\mathbf{u}^i_2 \end{bmatrix} \tag{50}$$

suivant que la polarisabilité soit tensorielle ou scalaire. Le premier indice de S indique la polarisation diffusée, et le second la polarisation incidente. Il est facile de montrer que la matrice de diffusion (49) dépend de la position du diffuseur (petit ou non). Pour une translation $\mathbf{d}$, la matrice est déphasée de :

$$[S](\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) \rightarrow [S](\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)e^{-ik_0(\hat{\mathbf{r}}_d-\hat{\mathbf{r}}_i)\cdot\mathbf{d}} \tag{51}$$

Ce déphasage s'annule en diffusion avant $\hat{\mathbf{r}}_d = \hat{\mathbf{r}}_i$.

Les bases couramment employée en Optique et en radioélectricité s'identifient plus ou moins à la base associés aux angles sphériques (θ,ϕ). En coordonnées cartésiennes,

$$\hat{\mathbf{r}} = \left| \begin{array}{l} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{array} \right. \qquad \mathbf{u}_1 = \partial_\theta\hat{\mathbf{r}} = \left| \begin{array}{l} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{array} \right. \qquad \mathbf{u}_2 = \partial_\phi\hat{\mathbf{r}}/\sin\theta = \left| \begin{array}{l} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{array} \right.$$

Si la même base est utilisée pour les directions incidentes et diffractées, alors en direction avant $\hat{\mathbf{r}}_d = \hat{\mathbf{r}}_i$, on a directement pour α scalaire

$$[S](\hat{\mathbf{r}}_i,\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{\pi\alpha}{\lambda_0^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [S](-\hat{\mathbf{r}}_i,\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{\pi\alpha}{\lambda_0^2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

En rétrodiffusion, si $\hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{r}}(\theta,\phi)$, alors $\hat{\mathbf{r}}_d = \hat{\mathbf{r}}(\theta+\pi,\phi)$ d'où $\mathbf{u}_1^d = -\mathbf{u}_1^i$ et $\mathbf{u}_2^d = +\mathbf{u}_2^i$ et la matrice de diffusion est aussi très simple.

III.4 Section efficace

D'après (17) et (36), la section efficace bistatique vaut en fonction de l'intensité diffusée

$$\sigma^b(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) = 4\pi\frac{I^d(\hat{\mathbf{r}}_d)}{|\mathbf{P}^i|} \qquad I^d(\hat{\mathbf{r}}_d) = \lim_{r\rightarrow\infty}\frac{|r\mathbf{E}|^2}{2\eta_0} \tag{53}$$

Suivant la polarisation incidente et celle de détection, on peut donc définir quatre σ^b polarisées, qui s'expriment directement en fonction du module carré des coefficients de la matrice de diffusion, et qu'on organise dans une matrice :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^b & \sigma_{12}^b \\ \sigma_{21}^b & \sigma_{22}^b \end{bmatrix}(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) = 4\pi\begin{bmatrix} |S_{11}|^2 & |S_{12}|^2 \\ |S_{21}|^2 & |S_{22}|^2 \end{bmatrix}(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) \tag{54}$$

En intégrant, sur $\hat{\mathbf{r}}_d$, on définit deux section efficaces de diffusion :

$$\begin{aligned} \sigma_1^d(\hat{\mathbf{r}}_i) &= \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}(\sigma_{11}^b+\sigma_{21}^b)(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)d\Omega_d = \int_{4\pi}(|S_{11}|^2+|S_{21}|^2)(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)d\Omega_d \\ \sigma_2^d(\hat{\mathbf{r}}_i) &= \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}(\sigma_{12}^b+\sigma_{22}^b)(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)d\Omega_d = \int_{4\pi}(|S_{12}|^2+|S_{22}|^2)(\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i)d\Omega_d \end{aligned} \tag{55}$$

suivant la polarisation incidente.

Pour un diffuseur de Rayleigh sphérique, ces section efficaces de diffusion ne devraient dépendre ni de l'incidence, ni de la polarisation. On fixe $\hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{r}}(\theta = 0,\phi = 0)$ de sorte que $\mathbf{u}_1^i = \hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{u}_2^i = \hat{\mathbf{y}}$. La matrice de diffusion vaut alors

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} (\hat{\mathbf{r}}_d,\hat{\mathbf{r}}_i) = \frac{(2\pi)^2 a^3}{\lambda_0^2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \begin{bmatrix} \cos\theta_d \cos\phi_d & \cos\theta_d \sin\phi_d \\ -\sin\phi_d & \cos\phi_d \end{bmatrix}$$

et on peut vérifier les section efficaces de diffusion :

$$n = 1,2 \qquad \sigma_n^d = \int_0^\pi \sin\theta_d d\theta_d \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi_d (|S_{1n}|^2 + |S_{2n}|^2) = \frac{4}{3} \frac{(2\pi)^4 a^6}{\lambda_0^4} \left| \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right|^2 \tag{56}$$

Ces section efficaces varient comme la sixième puissance du rayon a et l'inverse de la quatrième puissance de la longueur d'onde λ_0. Ainsi les basses fréquences - le rouge sur le spectre visible - sont beaucoup moins diffusées que les hautes fréquences. Ainsi Rayleigh expliqua-t'il la couleur bleue du ciel. Le soleil est rouge à son coucher, car la couche atmosphérique traversée étant plus grande, une part encore plus importantes des courtes longueurs d'onde sont diffusées.

IV Milieu diffusant

On considère une assemblée de N diffuseurs ou particules, contenues dans un domaine $\mathcal{D}$, tout baignant dans un milieu k_b et éclairés par un champ incident $\mathbf{E}^i$. Chaque particule est à la fois soumise au champ incident et aux champs diffusés par les $N-1$ autres diffuseurs : les diffuseurs sont couplés. Le champ incident capté et diffusée par un premier diffuseur. Ce champ diffusé est capté par une seconde particule, et à nouveau diffusé : on est en présence de diffusion multiple.

IV.1 Diffusion simple

Lorsque le milieu est très dilué : les distance inter-particules sont beaucoup plus grandes que la taille des particules et la longueur d'onde du milieu ambiant, on néglige le couplage entre particules et la diffusion multiple. Chaque particule diffuse comme si elle était seule en présence du champ incident : on fait une hypothèse de diffusion simple. Le champ diffusé total s'écrit alors comme la superposition cohérente (interférences) des champ diffractés par les N particules. Pour une onde plane incidente,

$$\mathbf{E}^d_N(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}^d_n(\mathbf{r}) \sim \frac{e^{ik_b r}}{r} \sum_{n=1}^{N} e^{-i(\mathbf{k}^d-\mathbf{k}^i)\cdot\mathbf{r}_n} \mathcal{S}_n(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i)\mathbf{E}_0$$

le champ lointain est obtenu à partir des dyades $\mathcal{S}_n(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i)$ des N particules définies en O et déphasées pour prendre en compte les positions $\mathbf{r}_n$ des diffuseurs. On définit alors la dyade $\mathcal{S}_N(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i)$ du milieu constitué par les N particules dans le domaine $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{S}_N(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) = \sum_{n=1}^{N} e^{-i(\mathbf{k}^d-\mathbf{k}^i)\cdot\mathbf{r}_n} \mathcal{S}_n(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) \tag{57}$$

On remarque que les interférences sont constructives dans la direction avant : $\mathcal{S}_N(\mathbf{k}^i,\mathbf{k}^i) = \sum_{n=1}^{N} \mathcal{S}_n(\mathbf{k}^i,\mathbf{k}^i)$.

Si les diffuseurs sont identiques et soit isotropes, soit tous orientés dans la même direction, alors $\mathcal{S}_n(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) = \mathcal{S}(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i)$ et

$$\mathcal{S}_N(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) = \mathcal{S}(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) \sum_{n=1}^{N} e^{-i(\mathbf{k}^d-\mathbf{k}^i)\cdot\mathbf{r}_n} \tag{58}$$

soit $\mathcal{S}_N(\mathbf{k}^i,\mathbf{k}^i) = N\mathcal{S}_n(\mathbf{k}^i,\mathbf{k}^i)$ en avant $\mathbf{k}^d = \mathbf{k}^i$. D'après le théorème optique (103), la section efficace d'extinction vérifie

$$\sigma^e_N(\mathbf{k}^i) = \frac{4\pi}{k_b} \Im m(\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathcal{S}_N(\mathbf{k}^i,\mathbf{k}^i)\hat{\mathbf{E}}_0) = N\sigma^e(\mathbf{k}^i)$$

elle est toujours proportionnelle au nombre de particules N.

Dans ces mêmes conditions, la section efficace différentielle de diffusion des N particules

$$\sigma^d_N(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) = |\mathcal{S}_N(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i)\hat{\mathbf{E}}_0|^2$$

est donc égale en direction avant $\mathbf{k}^d = \mathbf{k}^i$ à la section efficace différentielle de diffusion d'une particule, multipliée par N^2 ! Dans les autres directions,

$$\sigma_N^d(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) = \sigma^d(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) g(\mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i) \qquad g(\mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i) = \left| \sum_{n=1}^{N} e^{-i(\mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i)\cdot \mathbf{r}_n} \right|^2 \tag{59}$$

elle se met sous la forme du produit d'un facteur de forme représentant l'influence de la forme commune des diffuseurs et d'un facteur de structure g qui rend compte des positions relatives des diffuseurs.

Un exemple de milieu parfaitement ordonné est un monocristal, c'est-à-dire un réseau cubique de diffuseurs, de maille élémentaire a. Suivant les axes du cristal de dimensions L_x,L_y,L_z, le facteur de forme vaut :

$$g(\mathbf{k}) = g_x(k_x) g_y(k_y) g_z(k_z) \qquad g_j(k_j) = \sin^2(L_j k_j/2)/\sin^2(a k_j/2)$$

A haute fréquence pour $k_e a > \pi$ et en particulier en diffraction X, le facteur de forme $g(\mathbf{k} = \mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i)$ présente des maxima lorsque la condition de BRAGG

$$k_j = \frac{2\pi n}{a}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{60}$$

sur l'un ou l'autre des axes du cristal $j = x,y,z$. Mais à plus faible fréquence $k_e a \ll 1$, la fonction g est proche d'un sinus-cardinal $g(k) \simeq \mathrm{sinc}^2\,(Lk/2)$ et la diffusion est confinée à un voisinage angulaire de la direction avant de largeur λ_e/L.

IV.2 Diffusion aléatoire

Un milieu désordonné peut être modélisé par une distribution aléatoire de $N = nV$ diffuseurs. Pour le cas des diffuseurs identiques vu précédemment, et de plus supposés équirépartis sur le volume V, le champ cohérent ou champ moyen devient :

$$\langle \mathcal{S}_N(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) \rangle = \mathcal{S}(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) \sum_{n=1}^{N} \langle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \rangle = \mathcal{S}(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) nV \langle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \rangle = \mathcal{S}(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) n \int_V e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \tag{61}$$

On continue à noter $\mathbf{k} = \mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i$. A la traversée d'une couche de d'épaisseur d sur l'axe z, l'intégrale en x et y fait apparaître deux distributions de DIRAC centrées sur $k_x^d - k_x^i$ et $k_y^d - k_y^i$: le champ cohérent est diffusé dans les directions de reflexion et transmission d'une couche homogène.

La section efficace différentielle de diffusion moyenne fait intervenir la moyenne du facteur de forme :

$$\langle \sigma_N^d(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) \rangle = \sigma^d(\mathbf{k}^d,\mathbf{k}^i) \langle g(\mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i) \rangle \qquad g(\mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i) = \left| \sum_{n=1}^{N} e^{-i(\mathbf{k}^d - \mathbf{k}^i)\cdot \mathbf{r}_n} \right|^2 \tag{62}$$

avec toujours en avant $g = N^2$.

Exercice 20 *Montrer que le facteur de structure se met sous la forme :*

$$g(\mathbf{k}) = N + \sum_{n \neq m}^{N} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)}$$

où la somme porte sur tous les n de 1 à N et tous les m de 1 à N sauf $n = m$.

Le terme $\langle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}\rangle$ fait intervenir la densité de probabilité jointe de des positions des deux particules $p(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j)$. Il faut ici prendre en compte que deux particules ne peuvent se trouver à la même position. En pratique, $\langle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}\rangle$ tend souvent rapidement vers 0 quand on quitte la direction avant : les diffuseurs sont dits indépendants.

IV.3 Atténuation

Avec n [m^{-3}] la densité volumique de diffuseurs élémentaires, on définit à partir des section efficaces [m^2] les coefficients de diffusion, d'absorption et d'extinction [m^{-1}]

$$\kappa^s = n\sigma^s \qquad \kappa^a = n\sigma^a \qquad \kappa^e = n\sigma^e = \kappa^s + \kappa^a \tag{63}$$

Considérant que l'intensité varie de $dI = -\kappa^e I dz$ à la traversée d'une couche diffusante et absorbante d'épaisseur dz, cette intensité est atténuée dans le milieu suivant la loi

$$I = I_0 e^{-\kappa^e z} \tag{64}$$

Dans une couche inhomogène, on substitue à $\kappa^e z$ l'intégrale

$$\kappa^e z \to \int \kappa^e(z)dz \tag{65}$$

Enfin, on peut prendre en compte des diffuseurs de tailles différentes suivant une distribution $f(a)$:

$$n = \int_0^\infty f(a)da \qquad \kappa = \int_0^\infty f(a)\sigma(a)da \tag{66}$$

avec en particulier pour les sphères de Rayleigh

$$\kappa^s = \frac{8\pi}{3}k^4\left|\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\right|^2\int_0^\infty f(a)a^6da \qquad \kappa^a = \frac{4\pi}{3}k\varepsilon_r''\left|\frac{3}{\varepsilon_r+2}\right|^2\int_0^\infty f(a)a^3da \tag{67}$$

IV.4 Loi de mélange

On considère un milieu binaire, constitué par exemple de billes plongées dans un matériau hôte, ou bien d'un milieu diphasique, que l'on voudrait représenter par un milieu homogène, homogénéiser, et caractérisé par une permittivité effective. La formule triviale qui consisterait à faire la moyenne des permittivités $\varepsilon_h = f\varepsilon + (1-f)\varepsilon_0$, avec ε_0 pour l'hôte, $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\chi)$ pour les billes, pondérer par f la fraction volumique occupée par les billes, ou la moyenne des indices (...) se révélant donner des résultats très médiocres, on se tourne vers des solutions plus physiques.

On commence par étudier la polarisation statique d'une sphère diélectrique de permittivité $\varepsilon_r = 1+\chi$ et de volume $v = \frac{4\pi}{3}a^3$. Plongée dans un champ extérieur $\mathbf{E}^i$, la sphère acquière un moment dipolaire et une polarisation $\mathbf{p} = v\mathbf{P} = v\varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ lié au champ total dans la sphère $\mathbf{E}$. Le champ à l'extérieur de la sphère est la somme du champ extérieur $\mathbf{E}^i$ et du champ $\mathbf{E}^d$

rayonné par le dipôle $\mathbf{p}$. Avec $\frac{2\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ la composante longitudinale de $\mathbf{E}^d$, la conservation de la composante normale de $\mathbf{D}$ en tout point de la surface $r = a$ de la sphère donne :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \qquad \mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}^i \qquad \alpha_s = 4\pi a^3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \tag{68}$$

ainsi pour $\chi > 0$ le champ dans la matière est bien plus faible que dans le vide. On définit aussi la polarisabilité α_s de la sphère.

Passons maintenant à la polarisation diélectrique de la matière. Dans un champ macroscopique $\mathbf{E}$, les atomes ou les molécules acquièrent une polarisation microscopique α :

$$\mathbf{p} = \alpha\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right) \qquad \mathbf{P} = n\mathbf{p} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} \qquad n\alpha = 3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \tag{69}$$

Cette fois, la polarisation dépend de n la densité volumique d'atomes ou de molécules. La relation à droite dans (69) est appelée formule de Clausius-Mossotti. On retrouve le résultat de la sphère avec $n = 1/v$.

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_d}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{div}\mathbf{P} = -\rho_d \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho = \operatorname{div}\mathbf{D} \tag{70}$$

La divergence de ce vecteur polarisation compense dans l'équation de Maxwell-Gauss la densité volumique de charge ρ_d associée au diélectrique, de sorte qu'on puisse définir le champ $\mathbf{D}$.

Pour revenir à nos billes plongées dans un matériau hôte, suivant la théorie de Maxwell-Garnett, la formule de Clausius-Mossotti appliquée à

$$n = \frac{f}{v} = \frac{3f}{4\pi a^2} \qquad \alpha = 4\pi a^3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \qquad n\alpha = 3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_h - \varepsilon_0}{\varepsilon_h + 2\varepsilon_0} \tag{71}$$

pour trouver ε_h donne

$$\varepsilon_h = \varepsilon_0\frac{1 + 2f(\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 2)}{1 - f(\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 2)} \tag{72}$$

Cette loi de mélange est adaptées aux petites fractions volumiques f.

Pour les fractions volumiques plus forte, on part de la permittivité effective prise comme référence, et on annule la somme des polarisations associées aux deux milieux. On trouve l'équation de Bruggeman :

$$(1 - f)\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_h}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_h} + f\frac{\varepsilon - \varepsilon_h}{\varepsilon + 2\varepsilon_h} \tag{73}$$

Ces lois de mélange donnent toutes deux une permittivité effective réelle pour des milieux transparents : ils n'intègrent pas l'atténuation de diffusion exposée plus haut. Celle-ci peut être prise en compte dans des théories plus élaborées, notamment dans le cas des milieux aléatoires.

V Approximations

Le champ diffusée $\mathbf{E}^d$ à la pulsation ω dans le milieu k_b par un diffuseur $\mathcal{D}$ s'exprime soit par une intégrale volumique (**??**) sur le contraste χ et le champ interne $\mathbf{E}$ au diffuseur :

$$\mathbf{E}^d(\mathbf{r}) = k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \mathcal{G}_b^e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

soit par une intégrale surfacique (98) sur les composantes tangentielles des champs $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}$ et $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}$ au bord $\partial\mathcal{D}$ du diffuseur :

$$\mathbf{E}^d(\mathbf{r} \notin \mathcal{D}) = \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(i\omega\mu_b \mathcal{G}_b^e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}') + \mathcal{G}_b^m(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}')\right) dS'$$

Le seul cas où l'on peut résoudre analytiquement le problème rigoureux de de diffusion et déterminer χ,$\mathbf{E}$ ou $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}$,$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}$, c'est celui du dioptre plan avec les coefficients de Fresnel, et par extension le problème du multicouche.

Avant d'aborder les différentes approximations qui sont couramment employées pour résoudre le problème direct de diffusion, nous dirons deux mots des méthodes numériques. Avec $\mathbf{E} - \mathbf{E}^d = \mathbf{E}^i$, on obtient directement l'équation intégrale volumique vérifiée par le champ interne.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \mathcal{G}_b^e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \ \forall \mathbf{r} \in \mathcal{D} \tag{74}$$

Ce formalisme est dit intégral, par opposition au système différentielle des équations de Maxwell. Dans le cas d'un diffuseur $\mathcal{D}$ homogène, les composantes tangentielles des champs $\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}$,$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}$ verifient un jeu d'équations intégrales surfaciques ou équations intégrales de frontière.

Ces équations intégrales sont discrétisées sous la forme de systèmes linéaires et résolus numériquement. Ces techniques s'appellent méthodes des dipôles couplés pour les équations intégrales volumiques et méthode des moments ou méthode des éléments d'arrêtes pour les équations intégrales de frontière. Ces méthodes reposent toutes sur l'emploi de la fonction de Green de l'espace libre G_b et des dyades associées. Des méthodes alternatives existent, qui sont plus directement tirées des équations de Maxwell : la méthode des éléments finis et, en régime temporel, la FDTD pour *Finite Difference Time Difference*.

V.1 Diffusion de Born

Si le contraste χ est faible $\chi \ll 1$, alors le champ diffracté est négligé devant le champ incident dans le diffuseur. L'approximation de Born s'écrit alors

$$\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}^i,\ \mathbf{r} \in \mathcal{D} \qquad\qquad \mathbf{E}^d(\mathbf{r}) \simeq k_b^2 \int_{\mathcal{D}} \mathcal{G}_b^e(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\mathbf{E}^i(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' \tag{75}$$

et immediatement pour une onde plane incidente et en champ lointain,

$$\mathcal{S}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0) \simeq \frac{k_b^2}{4\pi}(1-\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\cdot) \int_{\mathcal{D}} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{r}'}\chi(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' = \frac{k_b^2}{4\pi}\,\chi(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\ (1-\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\cdot) \tag{76}$$

l'amplitude diffusée est proportionnelle à la transformée de Fourier du contraste en $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. En conséquence, et c'est son avantage principal, l'approximation de Born se prête au problème inverse de diffusion ou inversion. Elle est très utilisée en cristallographie et en imagerie médicale, où les contrastes sont très faibles, jusqu'à $\chi \sim 10^{-6}$. Notons que le contraste n'est pas le seul petit paramètre et que l'approximation de BORN marche d'autant mieux que le volume du diffuseur est petit.

Exercice 21 *Sachant que les vecteurs d'onde incident* $\mathbf{k}_0$ *et diffracté* $\mathbf{k}$ *sont de longueur* $k_b = \frac{2\pi}{\lambda_b}$*, quelle est la longueur maximale de* $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$ *? Quelle est, dans l'approximation de* BORN*, la plus haute fréquence spatiale du diffuseur accessible en champ lointain ?*

V.2 Approximation de Kirchhoff-plan tangent

Lorsque le contraste $\chi = \varepsilon_r - 1 \gg 1$ du diffuseur est fort, les coefficients de FRESNEL indiquent que le diffuseur est peu pénétrable :

$$r_p = \frac{\varepsilon_r q_i - q_t}{\varepsilon_r q_i + q_t} \xrightarrow{\varepsilon \to \infty} +1 \qquad\qquad r_s = \frac{q_i - q_t}{q_i + q_t} \xrightarrow{\varepsilon \to \infty} -1 \tag{77}$$

avec $q_i = -\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = k_b \cos\theta$ et $q_t = -\mathbf{k}_t \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sqrt{k_b^2(\varepsilon_r - 1) - q_i^2}$ pour l'incidence θ par rapport à la normale $\hat{\mathbf{n}}$ au dioptre plan.

Si de plus le bord du diffuseur présente des rayons de courbures très grand devant la longueur d'onde λ_b, on peut approcher en un point du bord les composantes tangentielles du champ diffracté par celles du champ spéculairement réfléchi par le plan tangent à ce point.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}^d & \simeq \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}^r \\ \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^d & \simeq \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^r \end{cases} \qquad \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}^r = \hat{\mathbf{n}} \wedge (r_s \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_i \cdot - r_p \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i \cdot) \mathbf{E}^i \\ \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}^r = \hat{\mathbf{n}} \wedge (r_p \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{s}}_i \cdot - r_s \hat{\mathbf{v}}_i \hat{\mathbf{v}}_i \cdot) \mathbf{H}^i \end{cases} \tag{78}$$

Pour une onde plane incidence, les champs réfléchis s'expriment directement en fonction des champs incidents et des directions avec $(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{s}}_i)$ associées aux polarisations fondamentales p et s pour le vecteur d'onde incident $\mathbf{k}_i$. Les coefficients de FRESNEL sont à évaluer pour l'incidence locale θ au point considéré. Les points pour lesquels $q_i < 0$ sont dits dans l'ombre du diffuseur, et ne contribuent pas au champ diffracté. Avec $\mathbf{H}^i = \mathbf{k}_i \wedge \mathbf{E}^i/(\omega\mu_b)$ et (100), l'opérateur de diffraction s'écrit sour la forme générale

$$\mathcal{S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}} dS \tag{79}$$

Exercice 22 *Donner dans le cadre de l'approximation de* KIRCHHOFF*-plan tangent l'expression de la dyade* $\mathcal{N}$*.*

V.3 Diffusion de Rayleigh

Considérons un diffuseur homogène $\mathcal{D}$ centré sur $\mathbf{r}_0$, de dimension caractéristique a et de contraste $\chi = k/k_b - 1 > 0$. La longueur d'onde électromagnétique dans le diffuseur est $\lambda = 2\pi/k = c/f < c_0/f = \lambda_b$, inférieure à la longueur d'onde dans le milieu environnant.

Si la fréquence f est suffisamment basse ou le diffuseur suffisamment petit pour que

$$a \ll \lambda < \lambda_b \tag{80}$$

alors

- le champ intérieur au diffuseur *n'a pas la place de varier beaucoup* d'un coté du diffuseur à l'autre, et peut être supposé constant.

  $$\mathbf{E}(\mathbf{r} \in \mathcal{D}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \tag{81}$$

  Ce champ interne est linéairement relié au champ incident sur le diffuseur.
- la dyade électrique varie aussi très peu sur $\mathcal{D}$, pourvu que le point d'observation $\mathbf{r}$ ne soit pas placé au voisinage immédiat du diffuseur, sans pour autant être en champ lointain : $r \gg a$ sans que nécessairement $r \gg \lambda_b$.

Ce diffuseur de Rayleigh se comporte comme un dipôle de vecteur moment dipolaire $\mathbf{p}$

$$\mathbf{E}^d(\mathbf{r}) = \omega^2 \mu_b \mathcal{G}_b^e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{p} \qquad \mathbf{p} = \varepsilon_b \chi v_{\mathcal{D}} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \alpha \varepsilon_b \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_0) \tag{82}$$

où $v_{\mathcal{D}}$ est le volume du diffuseur et α sa dyade de polarisabilité.

Le calcul électrostatique très classique de la polarisation de la sphère donne pour un diffuseur homogène sphérique de rayon a, une polarisabilité scalaire

$$\alpha_r = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \tag{83}$$

Problème 3 *Calculer la section efficace d'extinction σ^e, la section efficace différentielle de diffusion σ^d et la section efficace de diffusion σ^s d'un diffuseur de* Rayleigh.

VI Diffraction

Le principe d'Huyghens-Fresnel est au fondement des théories approchées etscalaires de la diffraction : Fresnel et Fraunhofer. Nous échafaudons dans ce chapitre la théorie rigoureuse et vectoriel de la diffraction des ondes électromagnétiques.

Exercice 23 *Montrer que le champ électrique* $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ *et le champ magnétique* $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ *vérifient en tout point du vide dépourvu de charge :*

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \tag{84}$$
$$\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

Exercice 24 *Montrer que pour une dépendance temporelle en* $e^{-i\omega t}$*, le champ électrique* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ *et le champ magnétique* $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ *vérifient en tout point d'un milieu linéaire homogène isotrope local de caractéristiques* (ε,μ) *à la pulsation* ω *et dépourvu de charge :*

$$\Delta\mathbf{E} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \tag{85}$$
$$\Delta\mathbf{H} + \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{H} = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

Le théorème de la divergence appliqué à un champ vectoriel $\mathbf{A}$, donne

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{A}dV = \oint_{\partial\Omega}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \tag{86}$$

Ω est un domaine borné de l'espace, de frontière (ou bord) $\partial\Omega$. La normale $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal au plan tangent à la frontière, orientée vers *l'extérieur* de Ω. $\partial\Omega$ peut être théoriquement constituée d'un nombre fini de surfaces fermées disjointes, mais en pratique, on raisonnera sur *une* surface fermée.

VI.1 Théorie de Kirchhoff-Helmholtz

Exercice 25 *Appliquer le théorème de la divergence aux champs vectoriels* $\mathbf{A} = A\,\mathbf{grad}\,B$ *puis* $\mathbf{A} = A\,\mathbf{grad}\,B - B\,\mathbf{grad}\,A$ *avec* A*, et* B *deux champs scalaires réguliers*[1] *pour retrouver les première et deuxième identité de* Green

$$\oint_{\partial\Omega} A\frac{\partial B}{\partial n}dS = \int_\Omega \left(A\Delta B + \mathbf{grad}\,A\cdot\mathbf{grad}\,B\right)dV \tag{87}$$

$$\oint_{\partial\Omega}\left(A\frac{\partial B}{\partial n} - B\frac{\partial A}{\partial n}\right)dS = \int_\Omega \left(A\Delta B - B\Delta A\right)dV \tag{88}$$

où $\frac{\partial B}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{grad}\,B$ *est la dérivée normale de* B*.*

1. Deux fois continûment dérivables sur Ω, et une fois sur son adhérence

On considère les deux champs scalaires Ψ et G vérifiant les équations de HELMHOLTZ

$$(\Delta + k^2)\Psi(\mathbf{r} \in \Omega) = 0 \qquad\qquad (\Delta + k^2)G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \tag{89}$$

$\Psi(\mathbf{r})$ est une fonction d'onde, par exemple l'une des coordonnées cartésiennes de $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{H}$, tandis que $G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|}$ est la fonction de GREEN de l'espace libre, solution élémentaire de l'équation de HELMHOLTZ vérifiant une COS.

Exercice 26 *Comparer* $\mathbf{grad}\, G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})$ *et* $\mathbf{grad}\, B(\mathbf{r})$ *avec* $B(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})$.

Exercice 27 *Appliquer la deuxième identité de* GREEN *aux deux champs scalaires* $A(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r})$ *et* $B(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})$ *avec* $\mathbf{r}_o$ *un point donné, et montrer que*

$$\oint_{\partial\Omega} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial \Psi}{\partial n}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS = -\int_{\Omega} \Psi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})dV = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}_o \notin \Omega \\ -\Psi(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r}_o \in \Omega \end{cases} \tag{90}$$

Cette formule (90) dite du problème intérieur exprime notamment le champ en tout point à l'intérieur d'un objet homogène sans sources en fonction de la valeur du champ et de sa dérivée normale sur le bord de l'objet.

Nous cherchons maintenant une formule analogue pour le problème extérieur : le champ dans un milieu homogène sans sources à l'extérieur d'un objet $\mathcal{D}$ borné contenant les sources et éventuellement inhomogène. Pour cela, on considère une sphère Φ de centre O l'origine du repère et de rayon R orientée vers l'extérieur qui inclue $\mathcal{D}$, et Ω est l'ensemble des points à l'intérieur de Φ qui sont à l'extérieur de $\mathcal{D}$. Le bord $\partial\mathcal{D}$ est orienté vers l'extérieur de $\mathcal{D}$, et donc vers l'interieur de Ω. Le problème extérieur correspond à la limite $R \to \infty$.

Exercice 28 *Montrer que*

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial \Psi}{\partial n}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS &= \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})dV \\ &+ \oint_{\Phi} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial \Psi}{\partial r}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial r}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS \end{aligned}$$

Exercice 29 *Montrer que lorsque* $R \to 0$,

$$\oint_{\Phi} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial \Psi}{\partial r}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial r}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS \sim \frac{1}{4\pi} \oint r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}(\mathbf{r}) - ik\Psi(\mathbf{r}) \right) e^{ik|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}|} d\Omega$$

On a donc

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Phi} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial \Psi}{\partial r}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial r}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS = 0 \tag{91}$$

si Ψ vérifie la condition de SOMMERFELD (31). La formule du problème extérieur

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial\Psi}{\partial n}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS = \int_{\mathbb{R}^3/\mathcal{D}} \Psi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})dV = \begin{cases} \Psi(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r}_o \notin \mathcal{D} \\ 0 & \mathbf{r}_o \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{92}$$

exprime notamment le champ rayonné dans un espace homogène par des sources primaires contenues dans un domaine borné en fonction de la valeur du champ et de sa dérivée normale sur le bord de ce domaine. Le champ sur le bord et sa dérivée normale constituent des sources surfaciques équivalentes ou secondaires.

Exercice 30 *Dans le cas de la diffusion par un objet $\mathcal{D}$ inhomogène, remarquer que :*
- *le champ incident vérifie $(\Delta + k^2)\Phi^i = 0$ dans $\mathcal{D}$,*
- *le champ diffracté $\Psi^d = \Psi - \Psi^i$ vérifie $(\Delta + k^2)\Phi^d = 0$ en dehors de $\mathcal{D}$, ainsi que la condition de* SOMMERFELD*.*

Exercice 31 *Dans le cas de la diffusion par un objet $\mathcal{D}$ inhomogène, combiner la formule du problème intérieur appliquée au champ incident Ψ^i et la formule du problème extérieur appliquée au champ diffracté $\Psi^d = \Psi - \Psi^i$ pour trouver la formule de* KIRCHHOFF-HELMHOLTZ

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial\Psi}{\partial n}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS = \begin{cases} \Psi^d(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r}_o \notin \mathcal{D} \\ -\Psi^i(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r}_o \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{93}$$

Ainsi encore une fois, le champ diffracté par un diffuseur borné, homogène ou non, dans un milieu homogène, s'exprime en fonction de la valeur du champ et de sa dérivée normale sur le bord du diffuseur. Le champ sur le bord et sa dérivée normale constituent des sources surfaciques équivalentes ou secondaires.

Exercice 32 *Montrer que l'intégrale à gauche des formules (90), (92) ou (93) se met sous la forme de produits de convolution impliquants $\delta_{\partial\mathcal{D}}$ la distribution de* DIRAC *associée au bord de $\mathcal{D}$.*

$$\begin{aligned} f(\Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial n}) &= \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\frac{\partial\Psi}{\partial n}(\mathbf{r}) + \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) \right) dS \\ &= \left(G * \frac{\partial\Psi}{\partial n}\delta_{\partial\mathcal{D}} \right)(\mathbf{r}_o) + \left(\mathbf{grad}\, G \overset{\cdot}{*} \Psi\hat{\mathbf{n}}\delta_{\partial\mathcal{D}} \right)(\mathbf{r}_o) \\ &= \left(G * \frac{\partial\Psi}{\partial n}\delta_{\partial\mathcal{D}} \right)(\mathbf{r}_o) + \mathrm{div}\, \left(G * \Psi\hat{\mathbf{n}}\delta_{\partial\mathcal{D}} \right)(\mathbf{r}_o) \end{aligned}$$

VI.2 Théorie de Stratton-Chu

La théorie scalaire de KIRCHHOFF-HELMHOLTZ permet de faire propager en espace homogène chaque composante cartésienne du champ électromagnétique, à partir de sa valeur et de sa dérivée normale sur le bord. La théorie vectorielle de STRATTON-CHU repose quand à elle sur les composantes tangentielles et normales des champs, composantes sur lesquelles s'appliquent les conditions aux limites au passage d'une interface entre deux milieux.

Exercice 33 *Rappeler les conditions aux limites électromagnétiques au passage d'une interface entre deux milieux homogènes.*

Les composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ constituent des courants de surface équivalentes ou secondaires et les composantes normales de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ sont des charges surfaciques équivalentes ou secondaires :

$$\mathbf{j}_e = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}\delta_{\partial\mathcal{D}} \qquad \rho_e = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}\delta_{\partial\mathcal{D}} \qquad \mathbf{j}_m = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}\delta_{\partial\mathcal{D}} \qquad \rho_m = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}\delta_{\partial\mathcal{D}} \tag{94}$$

avec $\delta_{\partial\mathcal{D}}$ la distribution de DIRAC

Exercice 34 *Résoudre les équations de* MAXWELL

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{E}_e - i\omega\mu\mathbf{H}_e &= \mathbf{0} & \operatorname{div}\mathbf{H}_e &= 0 \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{H}_e + i\omega\varepsilon\mathbf{E}_e &= \mathbf{j}_e & \operatorname{div}\mathbf{E}_e &= \rho_e/\varepsilon \end{aligned}$$

dans un milieu homogène à l'aide des dyades de GREEN *électrique $\mathcal{G}^e$ et magnétique $\mathcal{G}^m$.*

Exercice 35 *Résoudre les équations de* MAXWELL

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{E}_m - i\omega\mu\mathbf{H}_m &= \mathbf{j}_m & \operatorname{div}\mathbf{H}_m &= \rho_m/\mu \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{H}_m + i\omega\varepsilon\mathbf{E}_m &= \mathbf{0} & \operatorname{div}\mathbf{E}_m &= 0 \end{aligned}$$

dans un milieu homogène à l'aide des dyades de GREEN *électrique $\mathcal{G}^e$ et magnétique $\mathcal{G}^m$.*

Exercice 36 *En déduire que la solution des équations de* MAXWELL

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} &= \mathbf{j}_m & \operatorname{div}\mathbf{H}_m &= \rho_m/\mu \\ \mathbf{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\varepsilon\mathbf{E} &= \mathbf{j}_e & \operatorname{div}\mathbf{E}_m &= \rho_e/\varepsilon \end{aligned}$$

dans un milieu homogène est

$$\mathbf{E} = +i\omega\mu\mathcal{G}^e * \mathbf{j}_e + \mathcal{G}^m * \mathbf{j}_m \tag{95}$$

$$\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathcal{G}^e * \mathbf{j}_m + \mathcal{G}^m * \mathbf{j}_e \tag{96}$$

Exercice 37 *Exprimer $\mathcal{G}^e * \mathbf{j}_e$ en fonction de $\mathbf{j}_e$ et ρ_e.*

En notant

$$\begin{aligned} f^e(\mathbf{E},\mathbf{H}) &= +i\omega\mu\mathcal{G}^e * \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}\delta_{\partial\mathcal{D}} + \mathcal{G}^m * \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}\delta_{\partial\mathcal{D}} \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(i\omega\mu\mathcal{G}^e(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathcal{G}^m(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})\right) dS \end{aligned}$$

la théorie de STRATTON-CHU donne

$$f^e(\mathbf{E}^i,\mathbf{H}^i) = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{r}_o \notin \mathcal{D} \\ -\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r} \in \mathcal{D} \end{cases} \qquad f^e(\mathbf{E}^d,\mathbf{H}^d) = \begin{cases} \mathbf{E}^d(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r}_o \notin \mathcal{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{97}$$

respectivement pour la problème intérieur et le problème extérieur. En combinant ces deux problème on trouve la formule de STRATTON-CHU

$$f^e(\mathbf{E},\mathbf{H}) = \begin{cases} \mathbf{E}^d(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r}_o \notin \mathcal{D} \\ -\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o) & \mathbf{r} \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{98}$$

Exercice 38 *Formuler les problèmes intérieur et extérieur et donner la formule de* STRATTON-CHU *pour le champ magnétique en notant*

$$\begin{aligned} f^m(\mathbf{E},\mathbf{H}) &= -i\omega\varepsilon\mathcal{G}^e * \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}\delta_{\partial\mathcal{D}} + \mathcal{G}^m * \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}\delta_{\partial\mathcal{D}} \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(-i\omega\varepsilon\mathcal{G}^e(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathcal{G}^m(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})\right) dS \end{aligned}$$

Exercice 39 *Donner une expression de*

$$\mathcal{G}^e * \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}\delta_{\partial\mathcal{D}} = \oint_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{G}^e(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})dS \qquad \mathcal{G}^e * \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}\delta_{\partial\mathcal{D}} = \oint_{\partial\mathcal{D}} \mathcal{G}^e(\mathbf{r}_o - \mathbf{r})\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{r})dS$$

faisant apparaître les composantes normales des champs.

Exercice 40 *Vérifier que les quatre équations de* MAXWELL *sans sources sont vérifiées par les champs* $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_o)$, $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}_o)$ *dans* $\mathcal{D}$ *et par les champs* $\mathbf{E}^d(\mathbf{r}_o)$, $\mathbf{H}^d(\mathbf{r}_o)$ *en dehors de* $\mathcal{D}$.

Exercice 41 *A partir du comportement asymptotique des fonction et dyades de* GREEN, *montrer que le champ lointain vaut*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) \quad \sim \quad ikG(\mathbf{r}_o) \oint_{\partial\mathcal{D}} \{(1 - \hat{\mathbf{r}}_o\hat{\mathbf{r}}_o\cdot)\eta(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H})(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{r}}_o \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E})(\mathbf{r})\}\, e^{-ik\hat{\mathbf{r}}_o\cdot\mathbf{r}} dS \tag{99}$$

avec $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ *l'impédance propre du milieu.*

Exercice 42 *Montrer que les champs* $\mathbf{E}^d(\mathbf{r}_o)$, $\mathbf{H}^d(\mathbf{r}_o)$ *vérifient la condition de rayonnement de* SILVER-MÜLLER *(34).*

L'opérateur de diffusion définit par $\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) \sim \frac{e^{ikr_o}}{r_o}\mathcal{S}(k\hat{\mathbf{r}}_o,\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_0$ et pour un champ incident $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}$ s'écrit donc en fonction des composantes tangentielles des champs sur la surface :

$$\mathcal{S}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_0 = \frac{ik}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{D}} \left\{(1 - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot)\eta(\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H})(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{k}} \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E})(\mathbf{r})\right\} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dS \tag{100}$$

VI.3 Théorème Optique

Exercice 43 *Montrer que* $(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = ((\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}) \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H})) \cdot \hat{\mathbf{n}}$

Sur le bord d'un diffuseur $\mathcal{D}$, en écrivant $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^d$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^d$ et en intégrant le vecteur de POYNTING sur $\partial\mathcal{D}$, on trouve

$$\Phi^d + \Phi^a = -\frac{1}{2}\Re e \oint_{\partial\mathcal{D}} (\mathbf{E}^{i*} \wedge \mathbf{H}^d + \mathbf{E}^d \wedge \mathbf{H}^{i*}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \tag{101}$$

avec Φ^d et Φ^a les flux respectivement diffracté et absorbé par le diffuseur.

Prenons le cas d'une onde plane incidente

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_0 \wedge \mathbf{E}_0}{\eta} e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}} \tag{102}$$

On montre alors avec quelques manipulations vectorielles et (100) que

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} (\mathbf{E}^{i*} \wedge \mathbf{H}^d + \mathbf{E}^d \wedge \mathbf{H}^{i*}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{2i\pi\eta}{k} \mathbf{E}_0^* \cdot \mathcal{S}(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_0$$

d'ou le théorème Optique

$$\Phi^d + \Phi^a = \frac{2\pi}{\omega\mu} \Im m \left(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathcal{S}(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)\mathbf{E}_0\right) \quad \sigma^e(\mathbf{k}_0) = \frac{\Phi^d + \Phi^a}{|\mathbf{P}^i|} = \frac{4\pi}{k} \Im m(\hat{\mathbf{E}}_0^* \cdot \mathcal{S}(\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_0)\hat{\mathbf{E}}_0) \tag{103}$$

avec $\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0/|\mathbf{E}_0|$ la polarisation complexe.

Ce résutat remarquable indique que la section efficace d'extinction d'un diffuseur peut être déterminée à partir de la seule mesure en amplitude et en phase du champ diffracté dans la direction avant.

VI.4 Réciprocité

Considérons deux courants $\mathbf{j}_1$ et $\mathbf{j}_2$ de supports finis Ω_1 et Ω_2 créant des champs $(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2)$ dans un milieu linéaire inhomogène. Le milieu peut même être anisotrope, ε et μ sont alors des tenseurs, à condition d'être réciproque, c'est-à-dire avec ε et μ symétriques. Le théorème de réciprocité, dû à LORENTZ, stipule alors qu'on a toujours :

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{j}_1 \, dV = \int_{\Omega_2} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{j}_2 \, dV \tag{104}$$

Problème 4 *Montrer ce théorème en calculant* $\operatorname{div}(\mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{E}_2 - \mathbf{H}_2 \wedge \mathbf{E}_1)$.