

Introduction aux méthodes approchées de diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses

Gabriel SORIANO – Charles-Antoine GUÉRIN

28 janvier 2011

Table des matières

1	Introduction	1
2	Diffraction	2
2.1	Géométrie	2
2.2	Nombre d'onde	3
2.3	Matrice de diffraction	3
3	Méthode perturbative	4
3.1	Matrice de FRESNEL	4
3.2	Matrice de BRAGG	4
3.3	Rugosité	5
4	Optique physique et géométrique	5
4.1	Matrice de KIRCHHOFF	5
4.2	Intégrale de KIRCHHOFF	6
5	Surface rugueuse aléatoire	6
5.1	Méthode perturbative	6
5.2	Optique physique et géométrique	7

1 Introduction

Lorsque la lumière, ou toute onde électromagnétique, est réfléchiée et réfractée par un dioptre plan, le phénomène est entièrement et rigoureusement décrit par les lois de DESCARTES et les coefficients de FRESNEL. Lorsque ce dioptre devient rugueux, les choses se compliquent soudainement, et suivant les communautés – Optique, radar... – chacun y va de sa petite recette. On invoque les Grands Anciens pour contourner l'obstacle, et vite passer à autre chose.

Nous proposons ici une présentation simple et détaillée des méthodes approchées de diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses les plus courantes, et surtout suivant une approche que nous voulons exempte d'empirisme et de particularisme. Les expressions obtenues ne seront pas justifiées, car c'est une des difficultés de ces méthodes : leurs démonstrations sont longues et tortueuses, et relèvent souvent plus des mathématiques appliquées que de la Physique des ondes. Ainsi, il n'y a aucun prérequis. Nous présentons

les formules, en les explicitant au maximum, avec la volonté de ne laisser aucun détail d'implémentation dans l'ombre. Pour diffuser ces méthodes de diffraction.

2 Diffraction

2.1 Géométrie

Une surface rugueuse est avant tout un plan déformé. Dans un repère cartésien, on déforme le plan (xOy) d'équation $z = 0$ en une surface rugueuse d'équation $z = h(\mathbf{r})$ où le vecteur $\mathbf{r} = (x, y)$ désigne un point du plan (xOy) . L'axe des z est dirigé vers le milieu incident, et il forme avec le rayon incident le plan d'incidence (xOz) . Dans ce plan sont comptés positivement et par rapport à l'axe z d'un côté l'angle d'incidence θ_i et de l'autre côté l'angle de réflexion θ_r et l'angle de transmission θ_t , de telle sorte que les lois de DESCARTES s'écrivent $\theta_i = \theta_r$ et $\sin \theta_i = n \sin \theta_t$. Et l'incidence est définie sur $\theta_i \in [0; \pi/2]$.

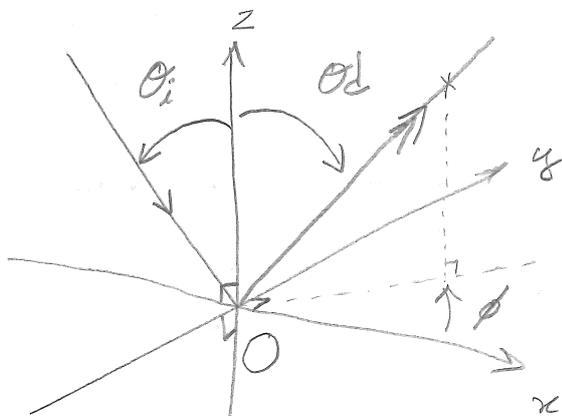


Fig. 1 - Configuration bistatique

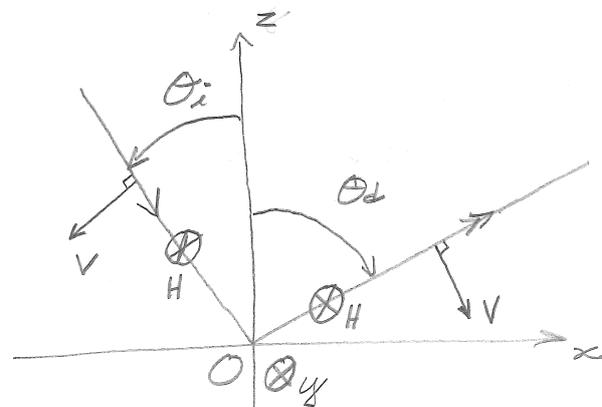


Fig. 2 - Plan d'incidence ($\phi=0$)

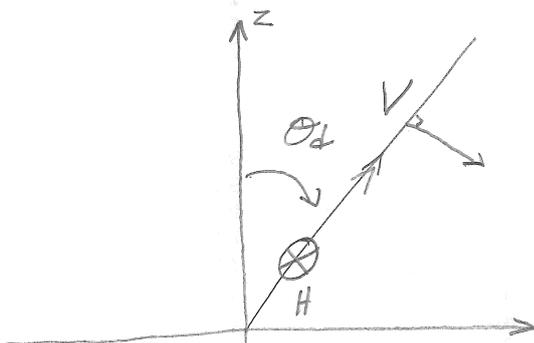


Fig. 3 - Plan de diffraction ϕ

Maintenant, la diffraction éparpille les rayons dans toutes les directions du milieu incident. Dans le plan d'incidence, on repère un rayon diffracté par l'angle $\theta_d \in [-\pi/2; \pi/2]$ du plan d'incidence suivant la même convention que θ_r (figure 2). En dehors du plan d'incidence, on définit un plan de diffraction par l'angle polaire ϕ qu'il fait dans le plan (xOy) avec le plan d'incidence (figure 1). Une direction diffractée dans le milieu incident est donc repérée par les deux angles θ_d et ϕ .

Les ondes planes électromagnétiques sont transverses, c'est-à-dire que le champ électrique est perpendiculaire à la direction du rayon. La direction du champ électrique est appelée polarisation. On considère deux cas de polarisation, suivant que le champ électrique est perpendiculaire (cas s¹) ou parallèle (cas p²) au plan d'incidence ou de diffraction, suivant le sens indiqué sur la figure 3.

Pour $\theta_d = 0$, toutes les valeurs de ϕ indiquent la même direction, mais pas les mêmes polarisations. Les couples d'angles (θ_d, ϕ) et $(-\theta_d, \phi \pm \pi)$ correspondent à la même direction diffractée, mais les vecteurs de polarisation pour chacun de ces couples sont de sens opposés.

2.2 Nombre d'onde

Comme pour le plan et les coefficients de FRESNEL, les méthodes de diffraction sont toutes développées en régime harmonique. On note $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation de travail, et on associe à chaque fonction du temps $f(t)$ une amplitude complexe A telle que $f(t) = \Re(Ae^{-i\omega t})$.

Le milieu incident $z > h(\mathbf{r})$ est homogène et transparent, comme l'air, et on définit son nombre d'onde $K = \omega/c$ où c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans ce milieu à la pulsation ω . Enfin, la longueur d'onde λ vaut $\lambda = 2\pi/K$.

$$\frac{\omega}{c} = K = \frac{2\pi}{\lambda} > 0 \quad (2.1)$$

Les caractéristiques électromagnétiques du milieu diffractant $z < h(\mathbf{r})$, à la pulsation ω et relativement à l'air sont notées ε et μ . Elles sont réelles si le milieu est transparent, et complexes en cas d'absorption. Le nombre d'onde du milieu diffractant vaut

$$K^d = K\sqrt{\varepsilon\mu} = K' + iK'' \quad K' = \frac{2\pi}{\lambda'} \geq 0 \quad K'' = \frac{1}{\delta} \geq 0 \quad (2.2)$$

et permet de définir la longueur d'onde dans ce milieu λ' et l'épaisseur de peau δ . Pour un matériau transparent ($K'' = 0$), le milieu inférieur est en toute rigueur homogène et semi-infini. En pratique, tous les matériaux réels ont une absorption, et il suffit que le milieu inférieur soit homogène sur une épaisseur e très grande devant l'épaisseur de peau δ .

2.3 Matrice de diffraction

Pour un rayon incident d'angle θ_i , d'amplitude complexe 1 et polarisée s, on note S_{pp} l'amplitude complexe de l'onde plane diffractée dans la direction (θ_d, ϕ) polarisée s – on dit copolarisée – et S_{sp} l'amplitude complexe polarisée p ou en polarisation croisée. De même, pour la polarisation incidente p, on note respectivement S_{ss} et S_{ps} les amplitudes diffractées co-polarisée et en polarisation croisée. Ainsi, on forme une matrice d'ordre 2, la matrice de diffraction

$$\mathcal{S}(\theta_d, \phi, \theta_i) = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{pp} & \mathcal{S}_{ps} \\ \mathcal{S}_{sp} & \mathcal{S}_{ss} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Cette matrice, comme chacun de ses éléments, dépend des angles incident et diffracté, et de la rugosité du dioptre, bien sûr. Elle permet de caractériser les ondes planes diffractées pour tout état de polarisation incident.

1. Ce cas est appelé E_{\perp} ou TE en électromagnétisme, s en Optique, et H en télédétection
 2. Ce cas est appelé E_{\parallel} ou TM en électromagnétisme, p en Optique, et V en télédétection

3 Méthode perturbative

Lorsque la hauteur est très petite devant la longueur d'onde, et aussi si les pentes restent modestes, et les angles sont non-rasants

$$z = h(\mathbf{r}) \ll \lambda \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(\mathbf{r}) \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial y}(\mathbf{r}) \right| \ll 1 \quad |\theta_i|, |\theta_d| \ll 90^\circ \quad (3.1)$$

l'amplitude diffractée s'écrit

$$\mathcal{S}(\theta_d, \phi, \theta_i) = \frac{\mathcal{R}(\theta_i)}{Q_z} \delta(\mathbf{Q}_H) - i\mathcal{B}(\theta_d, \phi, \theta_i) \tilde{h}(\mathbf{Q}_H) \quad (3.2)$$

où \mathcal{R} est la matrice de FRESNEL, δ la distribution de DIRAC, \mathcal{B} est la matrice de BRAGG, \tilde{h} est la transformée de FOURIER bidimensionnelle de la hauteur, évaluée pour le vecteur horizontal $\mathbf{Q}_H = (Q_x, Q_y)$ où

$$Q_x = K \sin \theta_d \cos \phi - K \sin \theta_i \quad Q_y = K \sin \theta_d \sin \phi \quad Q_z = K \cos \theta_d + K \cos \theta_i \quad (3.3)$$

C'est aussi la méthode asymptotique basse fréquence, c'est-à-dire correspondant à la limite $\omega = 2\pi\nu \rightarrow 0$ ou $K \rightarrow 0$ ou encore $\lambda \rightarrow \infty$.

3.1 Matrice de Fresnel

Nous ne considérons ici que le cas de l'interface séparant l'air (ou tout milieu transparent) d'un diélectrique de permittivité relative complexe ε , et le cas du métal infiniment conducteur.

Les coefficients de FRESNEL s'écrivent dans nos notations :

$$r^p = \frac{\varepsilon q - q'}{\varepsilon q + q'} \quad r^s = \frac{q - q'}{q + q'} \quad (3.4)$$

avec $q = \cos \theta$ et $q' = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}$, qui sont omniprésents dans les expressions des matrice de polarisation.

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} r^p & 0 \\ 0 & r^s \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A la limite infiniment conductrice $\varepsilon \rightarrow i\infty$, les q' deviennent infinis, mais $r^p \rightarrow +1$ et $r^s \rightarrow -1$.

3.2 Matrice de Bragg

La matrice de BRAGG dépend de plus d'un angle. Pour l'angle d'incidence θ_i , on utilise k_i , q_i , q'_i , r_i^p et r_i^s , et pour l'angle θ_d , ces paramètres deviennent k_d , q_d , q'_d , r_d^p et r_d^s .

Pour le cas diélectrique, la matrice de BRAGG s'écrit

$$\mathcal{B}_{pp}^\varepsilon = +K^2 \frac{\varepsilon - 1}{2} \left([1 - r_d^p][1 - r_i^p] q_d q_i \cos \phi - [1 + r_d^p][1 + r_i^p] \frac{K^2}{\varepsilon} \sin \theta_d \sin \theta_i \right) \quad (3.6)$$

$$\mathcal{B}_{sp}^\varepsilon = +K^2 \frac{\varepsilon - 1}{2} [1 + r_d^s][1 - r_i^p] q_i \sin \phi \quad (3.7)$$

$$\mathcal{B}_{ps}^\varepsilon = +K^2 \frac{\varepsilon - 1}{2} [1 - r_d^p][1 + r_i^s] q_d \sin \phi \quad (3.8)$$

$$\mathcal{B}_{ss}^\varepsilon = -K^2 \frac{\varepsilon - 1}{2} [1 + r_d^s][1 + r_i^s] \cos \phi \quad (3.9)$$

et à la limite infiniment conductrice, on obtient l'expression

$$\mathcal{B}_{pp}^{\infty} = +2K^2(\cos \phi - \sin \theta_d \sin \theta_i) \quad (3.10)$$

$$\mathcal{B}_{sp}^{\infty} = +2Kq_i \sin \phi \quad (3.11)$$

$$\mathcal{B}_{ps}^{\infty} = +2Kq_d \sin \phi \quad (3.12)$$

$$\mathcal{B}_{ss}^{\infty} = -2q_dq_i \cos \phi \quad (3.13)$$

3.3 Rugosité

Le système cartésien est défini comme suit : la surface rugueuse $z = h(\mathbf{r})$ est définie à partir de l'axe des z et l'axe x est tel que le plan d'incidence soit le plan (xOz) . Pour la transformation de FOURIER bidimensionnelle sur \mathbf{r} , nous utilisons les conventions :

$$\mathcal{F}[h](\mathbf{k}) = \tilde{h}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int h(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad h(\mathbf{r}) = \int \tilde{h}(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{h}](\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

$\delta(\mathbf{k})$ est la distribution de DIRAC bidimensionnelle ; on peut lui substituer dans le cas d'un faisceau incident de largeur $\ell \gg \lambda$ la gaussienne

$$\delta_{\ell}(\mathbf{k}) = \frac{\ell^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\|\mathbf{k}\|^2\ell^2} \rightarrow \delta(\mathbf{k}) \quad (3.15)$$

qui tend vers la distribution de DIRAC quand $\ell \rightarrow \infty$.

4 Optique physique et géométrique

Lorsque le rayon de courbure est très grand devant la longueur d'onde, et aussi si les pentes restent modestes, et les angles sont non-rasants

$$R(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y}} \gg \lambda \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(\mathbf{r}) \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial y}(\mathbf{r}) \right| \ll 1 \quad |\theta_i|, |\theta_d| \ll 90^\circ \quad (4.1)$$

l'amplitude diffractée, pic de réflexion spéculaire compris, s'écrit

$$\mathcal{S}(\theta_d, \phi, \theta_i) = \frac{\mathcal{K}(\theta_d, \phi, \theta_i)}{Q_z} \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

où \mathcal{K} est la matrice de KIRCHHOFF, $\frac{1}{4\pi^2} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$ est l'intégrale de KIRCHHOFF et $\mathbf{Q}_H = (Q_x, Q_y)$ où

$$Q_x = K \sin \theta_d \cos \phi - K \sin \theta_i \quad Q_y = K \sin \theta_d \sin \phi \quad Q_z = K \cos \theta_d + K \cos \theta_i \quad (4.3)$$

4.1 Matrice de Kirchhoff

La matrice de Kirchhoff vaut en infiniment conducteur :

$$\mathcal{K}_{pp}^{\infty} = +((K^2 + q_dq_i) \cos \phi - K^2 \sin \theta_d \sin \theta_i) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{K}_{sp}^{\infty} = +K(q_d + q_i) \sin \phi \quad (4.5)$$

$$\mathcal{K}_{ps}^{\infty} = +K(q_d + q_i) \sin \phi \quad (4.6)$$

$$\mathcal{K}_{ss}^{\infty} = -((K^2 + q_dq_i) \cos \phi - K^2 \sin \theta_d \sin \theta_i) \quad (4.7)$$

4.2 Intégrale de Kirchhoff

Soit la fonction de trois variables $F(\mathbf{r}, Q_z) = e^{-iQ_z h(\mathbf{r})}$, alors l'intégrale de KIRCHHOFF s'exprime à l'aide de la transformée de FOURIER bidimensionnelle sur $\mathbf{r} = (x, y)$ de F :

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-iQ_z h(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \tilde{F}(\mathbf{Q}_H, Q_z) \quad (4.8)$$

En Optique paraxiale où les angles θ_i et θ_d sont petits et $\cos \theta_d \simeq \cos \theta_i \simeq 1$ (approximation de GAUSS), l'intégrale de KIRCHHOFF s'identifie à la transformée de FOURIER :

$$A = \tilde{F}(\mathbf{Q}_H, 2K) \quad (4.9)$$

La phase $\Phi(\mathbf{r}) = Q_z h(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}$ est dite stationnaire aux points \mathbf{r}_s où $\mathbf{grad} \Phi(\mathbf{r}_s) = \mathbf{0}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\mathbf{grad} h(\mathbf{r}_s) = -\frac{\mathbf{Q}_H}{Q_z} \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(\mathbf{r}_s) = -\frac{\sin \theta_d \cos \phi - \sin \theta_i}{\cos \theta_d + \cos \theta_i} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(\mathbf{r}_s) = -\frac{\sin \theta_d \sin \phi}{\cos \theta_d + \cos \theta_i} \end{cases} \quad (4.10)$$

Ces valeurs de pentes sont appelées pentes spéculaires, et les points \mathbf{r}_s sont dits points brillants. Ils varient avec les angles θ_i , θ_d et ϕ mais ne dépendent d'aucuns paramètres électromagnétiques ou optiques. A la limite haute fréquence $K \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow \infty$, la méthode de la phase stationnaire donne

$$A = \frac{1}{2i\pi Q_z} \sum_{\mathbf{r}_s} \frac{e^{-iQ_z h(\mathbf{r}_s)} e^{-i\mathbf{Q}_H \cdot \mathbf{r}_s}}{\sqrt{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)^2}} \quad (4.11)$$

5 Surface rugueuse aléatoire

Pour une rugosité aléatoire, on s'intéresse à la moyenne et à la variance de l'amplitude diffractée, qui permettent de définir respectivement le coefficient de réflexion cohérente $r_c^\alpha(\theta_i)$ et le coefficient bistatique incohérent $\sigma_{\beta\alpha}(\theta_d, \phi, \theta_i)$. $\alpha = s$ ou p indique la polarisation incidente et $\beta = s$ ou p la polarisation diffractée. La réflectivité moyenne de la surface s'en déduit par

$$R_m^\alpha(\theta_i) = |r_c^\alpha(\theta_i)|^2 + \sum_{\beta} \int_{2\pi} \frac{\sigma_{\beta\alpha}(\theta_d, \phi, \theta_i)}{q_i} d\Omega_d \quad (5.1)$$

où l'intégrale porte sur toute les directions diffractée dans l'air, avec $d\Omega_d = \sin \theta_d d\theta_d d\phi$. Pour un miroir parfait, $R_m = 1$.

On a supposé la surface stationnaire, c'est-à-dire que tous les points sont statistiquement équivalents. On choisit la surface de hauteur moyenne nulle $\langle h \rangle = 0$, et on note $\sigma_h = \sqrt{\langle h^2 \rangle}$ sa hauteur quadratique moyenne.

5.1 Méthode perturbative

$$r_c^\alpha(\theta_i) = r^\alpha(\theta_i) \quad (5.2)$$

$$\sigma_{\beta\alpha}(\theta_d, \phi, \theta_i) = |\mathcal{B}_{\beta\alpha}(\theta_d, \phi, \theta_i)|^2 \tilde{\rho}(\mathbf{Q}_H) \quad (5.3)$$

La méthode perturbative telle que nous l'avons présentée prédit un coefficient de réflexion cohérent égal au coefficient de FRESNEL, c'est-à-dire indépendant de la rugosité. Pour aller

au dela, il faut pousser plus loin le développement perturbatif, ou se reporter à l'Optique physique.

Le spectre de rugosité $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$ est la transformée de FOURIER de la fonction de corrélation à deux points de la hauteur :

$$\rho(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle h(\mathbf{r}_1)h(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (5.4)$$

La corrélation la plus fréquemment rencontrée, en particulier en Optique, est gaussienne :

$$\rho_g(\mathbf{r}) = \sigma_h^2 e^{-\|\mathbf{r}\|^2/\ell_c^2} \quad \tilde{\rho}_g(\mathbf{k}) = \frac{\sigma_h^2 \ell_c^2}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}\|\mathbf{k}\|^2 \ell_c^2} \quad (5.5)$$

Cette corrélation est entièrement déterminée par les deux paramètres hauteur quadratique moyenne σ_h et rayon de corrélation ℓ_c . Elle est particulièrement pratique puisque corrélation et spectre sont analytiques. Elle caractérise des surfaces très régulières.

5.2 Optique physique et géométrique

Dans le cadre de l'Optique physique,

$$r_c^\alpha(\theta_i) = r^\alpha(\theta_i) \langle e^{-2iq_i h} \rangle \quad (5.6)$$

$$\sigma_{\beta\alpha}(\theta_d, \phi, \theta_i) = \left| \frac{\mathcal{K}_{\beta\alpha}(\theta_d, \phi, \theta_i)}{Q_z} \right|^2 \tilde{C}(\mathbf{Q}_H, Q_z) \quad (5.7)$$

avec

$$C(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, Q_z) = \langle e^{-iQ_z[h(\mathbf{r}_2) - h(\mathbf{r}_1)]} \rangle - |\langle e^{-2iq_i h} \rangle|^2 \quad (5.8)$$

et si la hauteur h est normalement distribuée, c'est-à-dire si sa densité de probabilité est gaussienne, alors

$$\langle e^{-2iq_i h} \rangle = e^{-2q_i^2 \sigma_h^2} \quad (5.9)$$

$$C(\mathbf{r}, Q_z) = e^{-Q_z^2 \sigma_h^2} (e^{Q_z^2 \rho(\mathbf{r})} - 1) \quad (5.10)$$

Notons que le calcul de \tilde{C} est généralement difficile.

Dans le cadre de l'Optique géométrique, $\tilde{C}(\mathbf{Q}_H, Q_z)$ est directement accessible et s'identifie à la densité de probabilité apparition des pentes spéculaires qui intervient.

$$\tilde{C}(\mathbf{Q}_H, Q_z) = \frac{1}{Q_z^2 P} \left(\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\sin \theta_d \cos \phi - \sin \theta_i}{\cos \theta_d + \cos \theta_i}, \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\sin \theta_d \sin \phi}{\cos \theta_d + \cos \theta_i} \right) \quad (5.11)$$