

L2 SPI

Electromagnétisme, contrôle continu 2

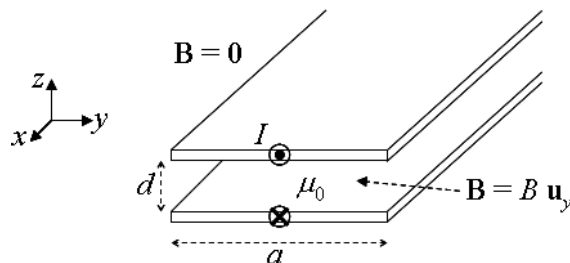
Lundi 24 novembre 2014

durée : 1 heure 30 ; documents interdits, calculatrice collègue autorisée

Les vecteurs sont notés en **gras** et les autres grandeurs en *italique*. Le candidat veillera à écrire lisiblement, soigner la rédaction de sa copie, faire des schémas clairs, préciser les unités des grandeurs et indiquer les vecteurs par une flèche surmontant leur symbole. On utilisera pour valeur numérique de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m et pour celle de la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12}$ SI.

1 Ligne de transmission à conducteurs plats

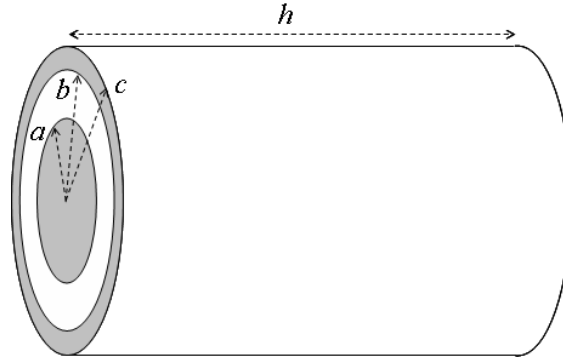
Une ligne de transmission est formée de deux bandes conductrices de largeur a , séparées d'une distance $d < a$ par un isolant. Un courant I circule en sens opposés dans les deux bandes (cf figure ci-dessous).



1. Enoncer la loi de Biot et Savart. Définir toutes les grandeurs introduites.
2. Enoncer le théorème d'Ampère (vous pouvez au besoin l'illustrer avec un schéma). Définir toutes les grandeurs introduites.
3. On considère que le champ magnétique est uniforme dans l'espace entre les deux bandes, et orienté selon l'axe y : $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_y$. Partout ailleurs on considère $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
Appliquer le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire à définir. En déduire qu'entre les deux bandes le champ magnétique est donné par $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{a} \mathbf{u}_y$. Le calculer pour $I = 10$ mA et $a = 4$ mm.
4. Une spire carrée de côté $b < d$ et parcourue par un courant I' est placée entre les deux bandes. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux bandes et la spire dans les deux cas suivants :
 - (a) La spire est dans le plan yOz .
 - (b) La spire est dans le plan xOz .
5. Quelle formule donne le moment magnétique \mathbf{m} de la spire ?
6. Quelle est la formule du couple exercé sur la spire par le champ magnétique entre les deux bandes ?
7. Quelle est la position d'équilibre de la spire entre les deux bandes ? Dessiner la spire en choisissant un sens de circulation au courant I' , et indiquer comment elle se positionne par rapport au champ magnétique entre les deux bandes.

2 Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué de deux armatures métalliques cylindriques de même axe : un cylindre plein de rayon a , portant une charge $Q > 0$, et un cylindre creux de rayon intérieur b et rayon extérieur c , portant une charge $-Q$. Les deux cylindres ont une hauteur h (cf figure ci dessous). Le tout est situé dans l'air.



On considère que $h \gg c$, et le champ électrique créé dans l'espace peut alors se mettre sous la forme radiale :

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r,$$

où r est la distance par rapport à l'axe des cylindres.

1. Enoncer le théorème de Gauss (vous pouvez au besoin l'illustrer avec un schéma). Définir toutes les grandeurs introduites.
2. Utiliser ce théorème pour calculer \mathbf{E} entre les armatures, pour $a < r < b$. L'appliquer sur un cylindre de rayon r et hauteur h . Montrer que le résultat se met sous la forme :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 hr}\mathbf{u}_r.$$

3. Toujours avec le théorème de Gauss, déterminer ce que vaut \mathbf{E} pour $r > c$.
4. Sans aucun calcul, donner ce que vaut \mathbf{E} pour $r < a$ et $b < r < c$.
5. Où est située la charge Q pour l'armature centrale? Même question pour l'armature périphérique.
6. Montrer que le potentiel V entre les armatures peut se mettre sous la forme :

$$V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln r,$$

à une constante additive près.

7. Calculer la différence de potentiels $U > 0$ entre les deux armatures. En déduire la capacité C du condensateur cylindrique. La calculer pour $a = 3$ mm, $b = 5$ mm et $h = 6$ cm.
8. La densité volumique d'énergie électrostatique est donnée par $w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. On souhaite calculer l'énergie électrique W_e stockée dans le condensateur, en intégrant w_e dans le volume entre les armatures. W_e peut alors s'écrire :

$$W_e = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^h w_e 2\pi r dr dz.$$

Calculer W_e . Montrer qu'on retrouve la formule bien connue (à rappeler) de l'énergie électrique d'un condensateur faisant intervenir C . Faire l'application numérique pour W_e avec $Q = 20$ mC.

9. L'air entre les armatures est remplacé par un matériau de constante diélectrique égale à 3, la tension U appliquée au condensateur restant constante. Comment sont modifiés C , \mathbf{E} et Q ?