Électromagnétisme – examen de première session

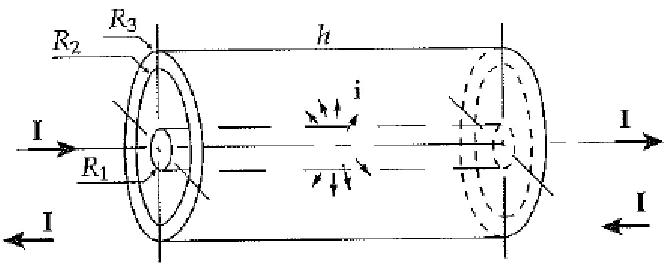
Lundi 6 janvier 2014

Pas de documents - calculatrices *collège* autorisées - durée 1h30

Le candidat veillera à écrire lisiblement, soigner la rédaction de sa copie, faire des schémas clairs, préciser les unités de toutes les grandeurs utilisées et indiquer les vecteurs par une flèche surmontant leur symbole.

A - Câble coaxial

Le conducteur central d'un câble coaxial transporte le courant I d'un générateur vers un récepteur. Le courant revient par le conducteur périphérique situé entre les rayons R_2 et R_3 ; on note rayon R_1 le rayon du conducteur central. Sur une longueur h du câble coaxial, un très faible courant i fuit au travers de l'isolant situé entre les deux conducteurs, du premier conducteur vers le deuxième (cf figure). On considére que le conducteur central et le conducteur périphérique sont de conductivité infinie, et de potentiels V_A et V_B, respectivement, avec $V_B < V_A$.



1. On souhaite calculer, pour une longueur h de câble coaxial, la résistance R de l'isolant, supposé ohmique et de conductivité γ.
   (a) Quelle relation lie un courant i et la densité volumique de courant $\vec{j}$ associée ? En utilisant la symétrie cylindrique du coaxial, calculer $\vec{j}$ en fonction de i en tout point situé à l'intérieur de l'isolant, en fonction de i et γ.
   (b) Quelle relation lie $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$? En déduire une première expression du champ $\vec{E}$ à l'intérieur de l'isolant.
   (c) Quelle relation lie la différence de potentiel $V_A - V_B$ au champ $\vec{E}$? En déduire l'expression de la résistance R.
   (d) Calculer R pour les valeurs suivantes : $R_1 = 0{,}6\,\text{mm}$; $R_2 = 3{,}7\,\text{mm}$; $R_3 = 3{,}8\,\text{mm}$; $\gamma = 10^{-10}\,\text{S/m}$; $h = 1\,\text{m}$.
2. On cherche à présent à calculer la capacité C d'un tronçon de coaxial de longueur h, considéré comme un condensateur cylindrique. La permittivité diélectrique de l'isolant est notée ε. Pour effectuer le calcul on considère qu'une charge $+Q$ est portée par la surface cylindrique de rayon R_1 et une charge $-Q$ par la surface de rayon R_2.
   (a) Quelle est la relation entre $+Q$, C et $V_A - V_B$?
   (b) Connaissant la symétrie du champ électrique, calculer le flux électrique Φ_e à travers une surface de Gauss cylindrique, coaxiale au câble, de rayon $\rho \in [R_1; R_2]$ et de longueur h. Ne pas oublier que la permittivité de l'isolant est ε.

(c) En déduire à l'aide du théorème de Gauss une seconde expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur de l'isolant, en fonction de $+Q$ et ε.

(d) Déterminer C à partir de la relation entre $V_A - V_B$ et $\overrightarrow{E}$.

(e) Calculer C pour les valeurs suivantes : $R_1 = 0{,}6\,\mathrm{mm}$; $R_2 = 3{,}7\,\mathrm{mm}$; $R_3 = 3{,}8\,\mathrm{mm}$; $\varepsilon = 4.\,10^{-11}\,\mathrm{F/m}$; $h = 1\,\mathrm{m}$.

3. DOnner l'expression du produit RC.

B - Générateur électrique

Une bobine plate constituée de N spires d'aire S reliée à un résistor de résistance R est en rotation à la pulsation $\omega = 2\pi/T$ dans un champ magnétostatique d'amplitude B et de direction perpendiculaire à l'axe de rotation. On note $u(t) = U \sin\theta(t)$ la tension aux bornes du résistor, avec $\theta = \omega t$, et $i(t)$ l'intensité qui le traverse.

1. Donner en fonction de N, S et ω, B l'expression de l'amplitude $U \geq 0$ de la tension $u(t)$.
2. Donner en fonction de U et R l'expression de la puissance Joule moyenne

$$P_J = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

dissipée par le résistor. On rappelle

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

3. Avec le moment dipolaire magnétique de la bobine $\overrightarrow{m} = NiS\overrightarrow{u}_n$, le couple exercé par le champ magnétique $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$ et le travail $dW = \Gamma d\theta$ associé à une rotation élémentaire $d\theta = \omega dt$, calculer la puissance mécanique moyenne P_m requise pour faire tourner la bobine.

C - Effet Kelvin

On donne l'expression suivante pour l'épaisseur de peau :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

1. On utilise une plaque métallique de conductivité $\gamma = 5.10^7\,\mathrm{S/m}$, de perméabilité $\mu = 200\mu_0$ et d'épaisseur $d = 2\,\mathrm{mm}$ pour isoler un équipement des ondes électromagnétiques extérieures. On rappelle la valeur de la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\mathrm{H/m}$. A partir de quelle fréquence les ondes sont-elles atténuées en amplitude d'un facteur $e^{d/\delta} = 1000$?
2. La résistance

$$R(\omega) = \frac{\ell}{\gamma S}$$

fait intervenir à haute-fréquence la surface effective $S = 2\pi a\delta$ où a est le rayon du cable et δ son épaisseur de peau. Comment évolue alors la résistance quand la fréquence est quadruplée ?

D - Onde électromagnétique

On considère deux fonctions d'onde monodimensionnelles $F_1(x,t) = f(x+ut)$ et $F_2(x,t) = f(x-ut)$.

1. Indiquer le sens de propagation de chacune des deux ondes.
2. Quelle est l'unité de u et préciser sa nature.
3. Quelle équation d'onde est vérifiée par ces deux fonctions d'onde ?
4. On considère maintenant une onde plane électromagnétique harmonique de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, de champ électrique $\overrightarrow{E}$ et de champ magnétique $\overrightarrow{B}$ au point M et à l'instant t. Indiquer les orientations relatives de ces trois vecteurs.