

## Exercices de mathématiques n° 9

**1 Convolution de 2 fonctions portes**

Soit  $\Pi$  la fonction "porte" définie par :  $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Soit  $a$  un réel positif donné.

1. Calculer  $f_a(x) = \Pi(x) * \Pi(x)$  et donner l'allure du graphe de la fonction  $f_a$ .

**2 Produit de convolution de plusieurs distributions**

Calculer  $(1 * \delta') * H$  et  $1 * (\delta' * H)$ . Conclusion ?

**3 Convolution de 2 fonctions localement sommables à support positif**

Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions localement sommable et  $H$  la fonction de Heaviside, le produit de convolution :  $H(x)f(x) * H(x)g(x)$  à toujours un sens si le résultat est pris au sens des distributions et ce dernier est donné par :

$$H(x) \int_0^x f(t)g(x-t) dt.$$

Calculer

1.  $H(x) \sin x * H(x) \cos x$ ,

**4 Distribution  $V_p(1/x)$  et transformation de Fourier**

1. Déterminer les T.F. de  $H(x)$  et  $H(-x)$ . En déduire la T.F. de  $f(x) = \exp(i2\pi|x|)$ .
2. On note  $V_p(1/u)$  la distribution "valeur principale de Cauchy" de  $1/u$  et on pose :

$$T_1(x) = (1-x^2) V_p\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad \text{et} \quad T_2(x) = (1-x^2) V_p\left(\frac{1}{x+1}\right).$$

Ecrire, pour  $\varphi \in \mathcal{D}$  les expressions de  $\langle T_1, \varphi \rangle$  et  $\langle T_2, \varphi \rangle$ .

Application : trouver une distribution  $T$  vérifiant l'équation :

$$(1-x^2) T = \frac{i}{\pi}.$$

3. Calculer la dérivée seconde au sens des distributions de  $f(x)$ . En déduire l'équation différentielle satisfaite au sens des distributions par  $f$ . Que peut-t-on en déduire pour la T.F.  $\hat{f}(\sigma)$  de  $f$  ?

**5 Limite d'une suite de polynômes**

1. Soit  $T$  une distribution à support borné : calculer les dérivées successives du produit de convolution  $T * x^n$ . En déduire que le produit de convolution d'une distribution à support borné par un polynôme est encore polynôme.
2. Montrer que pour  $y$  réel, on a :

$$\left| \left(1 - \frac{y^2}{n^3}\right) \right|^{n^3} \leq e^{-y^2}.$$

3. Montrer que la suite de polynômes :

$$P_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{n^3}$$

converge au sens des distributions vers  $\delta$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

4. En déduire que toute distribution à support borné est limite au sens de  $\mathcal{D}'$  d'une suite de polynômes.