

Exercices de mathématiques n° 8

1 Laplacien d'une fonction radiale

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} dont la valeur ne dépend que de $r = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

Montrer que dans ce cas, on a $\Delta f = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{df}{dr}$.

Dans le cas particulier de \mathbb{R}^3 , vérifier que $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2}$.

2 Laplacien de $\ln r$ dans \mathbb{R}^2

Montrer que dans \mathbb{R}^2 on a $\Delta(\ln r) = 2\pi\delta$.

3 Solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz

Montrer que dans \mathbb{R}^3 on a $(\Delta + k^2) \frac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\delta$.

Que se passe-t-il si on remplace e^{ikr} par e^{-ikr} ?

4 Transformation de Fourier et dérivation des distributions

1. Soit la fonction $f(x) = x\Pi(x/2)$. Calculer sa dérivée seconde au sens des distributions ; en déduire sa transformée de Fourier.
Vérifier votre résultat en calculant cette T.F. par une autre méthode.

2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Tracer son graphe. Calculer sa dérivée seconde au sens des distributions et en déduire sa transformée de Fourier.

3. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Déterminer sa transformée de Fourier de façon analogue à la question précédente.
