Exercices de mathématiques n° 7

1 Définition des distributions

Soit φ une fonction quelconque de $\mathfrak{D}$. Les expressions suivantes permettent-elles de définir des distributions ?

1. $< T, \varphi >= \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x$.
2. $< T, \varphi >= \int_0^1 \mid \varphi(x) \mid \mathrm{d}x$.
3. $< T, \varphi >= \sum_{n=0}^{N} \varphi^{(n)}(0)$.
4. $< T, \varphi >= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$.
5. $< T, \varphi >= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$.

2 Limite au sens des distributions

On considère la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{n}{2+n^2x^2} \qquad , \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite.
2. Rappeler la définition du changement d'échelle pour une distribution et démontrer la relation suivante :
$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad , \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x).$$
3. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, trouver la limite de cette suite au sens des distributions.
4. On considère l'intégrale :
$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{n}{2+n^2x^2} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \mathrm{d}x$$
Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$.

3 Convergence vers la distribution de Dirac

Montrer que la suite de terme général :

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n^2x^2}{2}\right)$$

converge vers δ.

4 Dérivation au sens des distributions

Calculer la dérivée seconde au sens des distributions des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} a) & f(x) & = & x^2 - 5 \mid x \mid +4 \quad , \quad & b) & f(x) & = & \mid x^2-4x+3 \mid \\ c) & f(x) & = & H(x)\,\mathrm{sh}(x), & d) & f(x) & = & \mid x-1 \mid + \mid (x-2)(x-3) \mid . \end{array}$$

5 Dérivée de Arctg$(1/x)$

La fonction $f(x) = \mathrm{Arctg}(1/x)$ est-elle localement sommable ? Justifier votre réponse.
Déterminer sa dérivée au sens des distributions

6 Équation différentielle au sens des distributions

Soit la fonction f vérifiant l'équation différentielle :

$$f" + f' - 2f = \sin(x) \qquad \text{avec les conditions initiales :} \qquad f(0) = f'(0) = 1.$$

On pose $F(x) = H(x)f(x)$. Ecrire l'équation différentielle satisfaite au sens des distributions par F.