Exercices de mathématiques n° 6

1 Transformée de Fourier d'une exponentielle

$H(x)$ est la fonction de Heaviside : $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ $H(x) = 0$ sinon. Calculer la TF des fonctions suivantes ($a > 0$) :

1. $e^{-a|x|}$
2. $H(x)e^{-a|x|}$
3. $H(x)x^n e^{-a|x|}$ pour $n > 0$

2 T.F. de $\Pi(x/3)\cos(\pi x)$

On note $\Pi(x)$ la valeur de la fonction "porte" égale à 1 si $|x|$,$< 1/2$ et à 0 ailleurs et $H(x)$ celle de la fonction de Heaviside égale à 1 si $x > 0$ et 0 ailleurs .

1. La fonction
$$f(x) = \Pi\left(\frac{x}{3}\right)\cos(\pi x).$$
a-t-elle une transformée de Fourier ?
Si oui, la calculer en écrivant le résultat sous la forme $\hat{f}(\sigma) = A(\sigma)\cos(b\sigma)$.
Donner l'expression de A et b .
2. Exprimer la fonction :
$$g(x) = [H(x) - H(x-3)]\ \sin(\pi x).$$
en fonction de $f(x)$. En déduire pratiquement sans calculs la T.F. $\hat{g}$ de g .

3 Transformée de Fourier en sinus ou cosinus

On considère une fonction f *à support positif* et on pose :

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que l'on a alors :

$$\text{si } x > 0 : f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos(\omega x)\ \mathrm{d}\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega)\sin(\omega x)\ \mathrm{d}\omega$$

Application : Résoudre l'équation intégrale : $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1-\omega & \text{si} \quad 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

4 Formule de Parseval-Plancherel

Calculer l'intégrale :

$$I_n = \int_0^\infty \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{pour } n = 2, 3, 4.$$

5 Transformée de Fourier de $\exp(-\pi x^2)$

1. (a) Rappeler la définition de la transformée de Fourier d'une fonction et donner une condition suffisante pour que cette transformée existe au sens des fonctions.
   (b) Peut-on prendre la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-\pi x^2}$ au sens des fonctions ?
   Justifier votre réponse.
2. En énonçant avec soin les hypothèses nécessaires, démontrer que si f a pour transformée la fonction $\hat{f}$ de la variable σ, sa dérivée f' a pour transformée $i2\pi\sigma\hat{f}$.
3. Calculer la dérivée de $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et écrire l'équation différentielle du 1er ordre satisfaite par f.
4. En déduire une équation différentielle satisfaite par la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
5. Résoudre cette équation diférentielle et en déduire $\hat{f}$ à une constante près.
6. Trouver la constante. On donne : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\ \mathrm{d}x = 1$.