Exercices de mathématiques n° 3

1 Intégrale au sens de Lebesgue

Soit f une fonction sommable sur $[a,b]$ au sens de Lebesgue. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \ln\left(e+\frac{|x|}{n}\right) f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

2 Intégrale de Riemann généralisée et intégrale de Lebesgue

1. Montrer que les intégrales de Riemann généralisées suivantes existent et sont finies :

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

2. Montrer que les intégrales de Riemann généralisées suivantes sont infinies :

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

3. Montrer que les fonctions $\frac{\sin(x)}{x}$ et $\frac{\cos(x)}{x}$ ne sont pas Lebesgue-intégrables sur $[1,\infty[$.

3 Fonction définie par une intégrale

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que f est définie et continue pour $x\geq 0$, et dérivable pour $x>0$.
2. Montrer que pour $x>0$ la fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire de la forme :

$$f'-f=g$$

où g est une fonction que l'on déterminera.

3. En utilisant le méthode dite de "variation de la constante" exprimer f en utilisant la "fonction d'erreur" notée erf et définie par :

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t\,.$$

4 Théorème de dérivabilité pour les intégrales de Lebesgue : applications aux fonctions définies par des intégrales

Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^+$, et à croissance au plus exponentielle ($\exists\, p_0\in\mathbb{R}\ tq\ |f(t)|\leq C\exp(p_0t)$ où C est une constante). On définit la transformée de Laplace $\hat{F}$ de f par :

$$\hat{F}(p)=\int_{[0,\infty[} f(t)\exp(-pt)dt \quad \text{où } p\in\mathbb{C}.$$

Montrer que $\hat{F}(p)$ est définie et dérivable dans le demi-plan $\Re(p)>p_0$ et que l'on a :

$$\hat{F}'(p)=\int_{[0,\infty[}(-t)f(t)\exp(-pt)dt$$