Exercices de mathématiques n° 2

1 Étude de la convergence de quelques intégrales généralisées

Les intégrales de Riemann généralisées suivantes convergent-elles ?

$$\int_0^1 \sin(\frac{1}{t})\ \mathrm{d}t \quad , \quad \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\,x}\ \mathrm{d}t \quad , \quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d}x \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Log} t}{t^2+1}\, \mathrm{d}t.$$

2 Calcul de quelques intégrales généralisées

Calculer la valeur des intégrales ci-dessous, si elles convergent.

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctg} x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^n}\, \mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)(1+e^{-x})} \qquad I_4 = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

3 Intégrale de Riemann généralisée et intégrale de Lebesgue

Soit f la fonction définie presque partout par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0,1]$ bien que $\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ soit une intégrale de Riemann généralisée convergente.