

## Exercices de mathématiques n° 1

### 1 Convergence simple et convergence uniforme

On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f_n$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^4}.$$

Étudier la convergence de  $f_n$  en convergence simple, puis en convergence uniforme.

### 2 Intégration et convergence uniforme

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f_n$  par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} - 1 + \frac{1}{n} & \text{pour } n^2 - n \leq x \leq n^2 \\ \frac{-x}{n^2} + 1 + \frac{1}{n} & \text{pour } n^2 \leq x \leq n^2 + n \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que la suite  $f_n$  converge simplement et uniformément vers une fonction  $f(x)$  que l'on précisera. Est-il vrai que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx?$$

Commenter.

### 3 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

1. Tracer le graphe de la fonction  $u_n$  définie par :

$$u_n(x) = n^2 x^2 \exp(-nx^2) \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. La suite de fonctions  $u_n$  converge-t-elle simplement vers zéro en tout point de  $\mathbb{R}$  ?

3. La convergence de la suite est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ?

4. La convergence de la suite est-elle uniforme sur  $(a, +\infty)$ ,  $a > 0$  ?

### 4 Étude de deux suites de fonctions

Étudier du point de vue de la convergence simple et de la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  les suites :

$$f_n(x) = \cos^n x \sin x, \quad g_n(x) = n f_n(x)$$

Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} g_n(x) \, dx$ .

---