Exercices de mathématiques n° 3

1 Intégration de $\dfrac{\sin x}{x}$

Calculer $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ par exemple en intégrant $\dfrac{e^{iz}-1}{z}$ sur le lacet simple

$$\{-R \leq x \leq R\} \cup \{z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

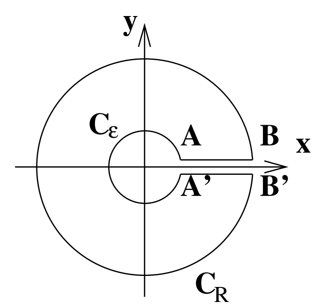
2 Intégration de $\sqrt{x}\ \ln x/(x+1)^2$.

1. (a) Expliquer pourquoi la définition de la fonction $\sqrt{z}$ dans $\mathbb{C}$ nécessite la mise en place d'une coupure.
   (b) Si on prend comme coupure le demi-axe réel positif, et que l'on pose $\sqrt{-1} = i$, dans quelle région du plan complexe se trouve obligatoirement l'image de $Z = \sqrt{z}$?
   (c) Énoncer avec précision le théorème des résidus pour le calcul des intégrales dans $\mathbb{C}$.

2. On pose

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Calculer I en utilisant une intégrale complexe le long du chemin Γ dont la trajectoire est représentée ci-contre.



3. On pose :

$$L = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ \ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Calculer L en utilisant le contour Γ.

3 Intégration de $R(x)\ln|x^2-a^2|$

1. Quels sont dans le plan complexe des z les points de branchement de $\mathrm{Log}(z^2-a^2)$? Justifiez votre réponse.
2. On suppose dans toute la suite que a est un réel positif.
   Pour définir la fonction $f : z \mapsto \mathrm{Log}(z^2-a^2)$, on choisit comme coupures deux demi-droites parallèles à l'axe imaginaire, situées dans le demi-plan $\Im m(z) < 0$ et on pose : $f(2a) = \ln(3a^2)$.
   En expliquant comment vous procédez, calculez $f(-2a)$.
   Y-a-t-il d'autres types de coupures utilisables dans ce cas ? Commentez.
3. Soit $R(x)$ une fraction rationnelle continue et réelle pour les valeurs réelles de x et $a_1, \ldots, a_n$ ses pôles situés dans le demi-plan $\Im m(z) > 0$. Montrez en utilisant une intégrale le long d'un contour fermé par un demi-cercle situé dans ce demi-plan que si l'intégrale converge on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\ \ln|x^2-a^2|\ \mathrm{d}x = A\ \Im m\left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[a_k,\ R(z)\ f(z)]\right\}$$

où A est constante que l'on déterminera.