Exercices de mathématiques n° 2

1 Fonction $\sqrt{z}$

On définit la fonction complexe $z \mapsto \sqrt{z}$ en utilisant le demi-axe réel positif comme coupure et en posant $\sqrt{-1} = i$. On note $z = x + iy$. Comparer les valeurs respectives de $\lim_{\epsilon\to 0} \sqrt{x + i\epsilon}$ et de $\lim_{\epsilon\to 0} \sqrt{x - i\epsilon}$ pour x et $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

2 Fonctions Log et racine

On prend comme coupure le demi-axe imaginaire négatif $i\mathbb{R}^-$ pour définir les fonctions Log et $\sqrt{\ }$ en choisissant comme détermination $\operatorname{Log} 1 = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.

1. Calculer $\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ et $\operatorname{Log}(z_1 z_2)$ pour $z_1 = i$ et $z_2 = -1-i$ puis pour $z_1 = i$ et $z_2 = -1+i$.
2. Pour quelles valeurs de z a-t-on $\operatorname{Log}(e^z) = z$?
3. Pour quelles valeurs de z a-t-on $\sqrt{z^2} = z$?
4. Pour quelles valeurs de z a-t-on $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z)$
5. Déterminer la valeur de $\sqrt{(-1)^2}$, $\sqrt{i^2}$ et $\operatorname{Log}[\exp(6i - 1)]$.

3 Racine carrée de $\sqrt{z^2 - 4z + 5}$

Soit la fonction f de la variable complexe z définie par :

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 4z + 5} \qquad \text{avec} \qquad f(0) = \sqrt{5}$$

en utilisant comme coupure le segment de droite reliant les deux points de branchement de cette fonction.

1. Quels sont les points de branchement de f ? Expliquez pourquoi la coupure proposée permet bien de définir une vraie fonction qui, à une valeur de la variable associe une seule valeur de la fonction.
2. En expliquant comment vous parvenez au résultat, déterminer la valeur de $f(3)$.
3. Quelle courbe décrit l'image de $f(z)$ dans le plan complexe quand z longe les bords de la coupure ?

4 Racine d'un polynôme de degré trois

Soit f une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ (x et $y \in \mathbb{R}$) vérifiant :

$$f(z) = \sqrt{z^3 - 4z^2 + 9z - 10} \qquad \text{et} \qquad f(1) = 2i.$$

On appelle A et B les points de branchement de f qui sont des nombres complexes conjugués et C le point de branchement sur l'axe réel.

1. Déterminer les trois points de branchements A, B et C.
2. Peut-on utiliser comme coupures pour définir f l'ensemble E des trois demi-droites constitué par la droite portant le segment AB privée de ce segment et la demi-droite $D_1 : \{z = x, x \in [2, \infty[\}$? Expliquer pourquoi. En cas de réponse positive, calculer la valeur de $f(0)$.
3. Même question avec pour éléments de E les segments AC et BC

5 Coupures et logarithme

On pose $z_1 = \sqrt{2}\exp(i\pi/4)$, $z_2 = iz_1$,$z_3 = \bar{z}_1$ et $z_4 = \bar{z}_2$. Expliquez pourquoi la fonction :

$$f(z) = \mathrm{Log}\,\frac{z^2+2z+2}{z^2-2z+2}$$

peut se définir en utilisant comme coupures les segments de droite D_1 joignant z_1 à z_2 et D_2 joignant z_3 à z_4.
Application : On pose f(0) = 0. Calculer $f(2i)$.

6 Série de Laurent de $1/[(1+z)(z-2)^2]$

Développer en série de Laurent la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)(z-2)^2}$$

1. suivant les puissances de z dans la couronne $1 < |z| < 2$,
2. suivant les puissances de $z-1$ dans la couronne $1 < |z-1| < 2$.

7 Pôles et résidus

Déterminer les singularités et les résidus des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{z+z^3} \quad , \quad \frac{1}{e^z+1} \quad , \quad \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \quad , \quad \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3} \quad , \quad \frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right).$$

8 Intégration de $z|z|$

Calculer

$$I = \int_\gamma z|z|\ \mathrm{d}z$$

sachant que γ est, en utilisant le langage de l'ingénieur, défini par le schéma ci-contre.

9 Intégrale d'une fraction rationnelle.

On définit la fonction logarithme avec le demi-axe réel positif comme coupure. Soit $R(x)$ une fraction rationnelle de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telle que $\int_0^\infty |R(x)|\ \mathrm{d}x$ existe.

Montrer que :

$$\int_0^\infty R(x)\ \mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[a_k,\ R(z)\ \mathrm{Log}\, z].$$

Application : calculer au moyen de cette formule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x\,.$