Exercices de mathématiques n° 1

1 Calcul sur les nombres complexes

Pour chercher l'ensemble des nombres complexes vérifiant la condition : $|z+a| < |\bar{z}+a|$ on a trouvé dans une copie la suite de calculs suivante :

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & (z+a)(\bar{z}+\bar{a}) & < & (\bar{z}+a)(z+\bar{a}) \\
(2) & z\bar{z}+z\bar{a}+\bar{z}a+a\bar{a} & < & z\bar{z}+\bar{z}\bar{a}+za+a\bar{a} \\
(3) & z\bar{a}+\bar{z}a & < & \bar{z}\bar{a}+za \\
(4) & z(\bar{a}-a) & < & \bar{z}(\bar{a}-a) \\
(5) & z/\bar{z} & < & 1.
\end{array}
$$

Indiquez la ligne comportant une erreur qui rend cette suite de calculs sans valeur.

2 Relations dans le plan complexe

Les nombres z_1 et z_2 étant des complexes quelconques, montrer les relations suivantes :

1. $|\,|z_1|-|z_2|\,| \;\leq\; |z_1-z_2| \;\leq\; |z_1|+|z_2|$
2. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$
3. $|z_1\overline{z}_2-1|^2-|z_1-z_2|^2 = (|z_2|^2-1)\;(|z_1|^2-1)$

3 Cercle dans le plan complexe

Soient A et C deux constantes réelles ($A>0$), B une constante complexe telle que $AC <\mid B\mid^2$. Montrer que l'équation :

$$A \mid z\mid^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$$

est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

4 Trigonométrie dans le plan complexe

Montrer que si $x = \Re e(z)$ et $y = \Im m(z)$, on a :

$$\Re e\,[\mathrm{tg}(z)] = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}.$$

5 Fonction exponentielle

1. Montrer qu'il n'existe aucune valeur complexe de z pour laquelle $\exp(z)$ s'annulle.
2. Pour qu'elles valeurs de z dans $\mathbb{C}$ la fonction $\exp z$ prend elle des valeurs réelles ?
3. Pour qu'elles valeurs de z dans $\mathbb{C}$ la fonction $\exp z$ prend elle des valeurs imaginaires pures ?

6 Fonction exponentielle

1. Montrer qu'il n'existe aucune valeur complexe de z pour laquelle $\exp(z)$ s'annulle.
2. Pour qu'elles valeurs de z dans $\mathbb{C}$ la fonction $\exp z$ prend elle des valeurs réelles ?

7 Image d'une courbe

Soit $E = \left\{ z \in \mathbb{C}, \mid z \mid = 1, \; 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.

1. Quelle courbe décrit l'image de z^4 quand z parcours E ?
2. Même question pour z^2 si $E = \{ z \in \mathbb{C}, \; \Re e(z) = 1 \}$.

8 Équations trigonométriques dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$\cos(2z) = 0$ $\quad$ $\mathrm{ch}(2z) = 0$ $\quad$ $\cos(2z) = 2$ $\quad$ $\cos z + \cosh z = 0$.

9 Recherche d'une fonction holomorphe

Soit $X(x, y) = y \cos(y) \, \mathrm{sh}(x) \; + \; x \sin(y) \, \mathrm{ch}(x)$.
Calculer le Laplacien ΔX.
Trouver $Y(x, y)$ pour que la fonction $f(z) = X + iY$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.
Calculer ΔY.

10 Recherche d'une fonction holomorphe

Soit la fonction $P(x, y) = x^2 - y^2 + xy$. Trouver la fonction $Q(x, y)$ pour que $f = P + iQ$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $f(0) = 0$. Calculer ΔP.

11 Formule de Cauchy

Trouver la fonction $f(z)$ holomorphe dans le disque ouvert $\mid z \mid < R$ avec $R > 1$ qui prend sur le cercle unité la valeur :

$$f(e^{i\theta}) = \frac{R - \cos\theta + i \sin\theta}{R^2 - 2R\cos\theta \; + 1}.$$

12 Relations de Cauchy en coordonnées polaires

On pose : $z = r \exp(i\theta)$ et $f(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta)$.
Montrer que si f est une fonction holomorphe, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned}$$