Exercices de mathématiques n° 9

1 Convolution de 2 fonctions portes

Soit Π la fonction "porte" définie par : $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Soit a un réel positif donné.

1. Calculer $f_a(x) = \Pi(x) * \Pi(x)$ et donner l'allure du graphe de la fonction f_a.

2 Produit de convolution de plusieurs distributions

Calculer $(1 \, * \, \delta') \, * \, H$ et $1 \, * \, (\delta' \, * \, H)$. Conclusion ?

3 Convolution de 2 fonctions localement sommables à support positif

Montrer que si f et g sont deux fonctions localement sommable et H la fonction de Heaviside, le produit de convolution : $H(x)f(x) * H(x)g(x)$ à toujours un sens si le résultat est pris au sens des distributions et ce dernier est donné par :

$$H(x) \int_0^x f(t)g(x-t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Calculer

1. $H(x) \, \sin x \; * \; H(x) \, \cos x$,

4 Distribution $V_p(1/x)$ et transformation de Fourier

1. Déterminer les T.F. de $H(x)$ et $H(-x)$. En déduire la T.F. de $f(x) = \exp(i2\pi|x|)$.
2. On note $V_p(1/u)$ la distribution "valeur principale de Cauchy" de $1/u$ et on pose :

$$T_1(x) = (1-x^2) \, V_p(\frac{1}{x-1}) \qquad \text{et} \qquad T_2(x) = (1-x^2) \, V_p(\frac{1}{x+1}).$$

Ecrire, pour $\varphi \in \mathfrak{D}$ les expressions de $< T_1, \varphi >$ et $< T_2, \varphi >$.
Application : trouver une distribution T vérifiant l'équation :

$$(1-x^2) \, T = \frac{i}{\pi}.$$

3. Calculer la dérivée seconde au sens des distributions de $f(x)$. En déduire l'équation différentielle satisfaite au sens des distributions par f. Que peut-t-on en déduire pour la T.F. $\hat{f}(\sigma)$ de f ?

5 Limite d'une suite de polynômes

1. Soit T une distribution à support borné : calculer les dérivées successives du produit de convolution $T \, * \, x^n$. En déduire que le produit de convolution d'une distribution à support borné par un polynôme est encore polynôme.
2. Montrer que pour y réel, on a :

$$\left| \left(1 - \frac{y^2}{n^3} \right) \right|^{n^3} \; \leq \; e^{-y^2}.$$

3. Montrer que la suite de polynômes :

$$P_n(x) \; = \; \frac{n}{\sqrt{\pi}} \, \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^{n^3}$$

converge au sens des distributions vers δ quand $n \to \infty$.

4. En déduire que toute distribution à support borné est limite au sens de $\mathfrak{D}'$ d'une suite de polynômes.