Exercices de mathématiques n° 8

1 Laplacien d'une fonction radiale

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ dont la valeur ne dépend que de $r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

Montrer que dans ce cas, on a $\Delta f = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$.

Dans le cas particulier de $\mathbb{R}^3$, vérifier que $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2(rf)}{\mathrm{d}r^2}$.

2 Laplacien de $\ln r$ dans $\mathbb{R}^2$

Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ on a $\Delta(\ln r) = 2\pi\delta$.

3 Solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz

Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ on a $(\Delta + k^2)\dfrac{e^{ikr}}{r} = -4\pi\delta$.
Que se passe-t-il si on remplace e^{ikr} par e^{-ikr} ?

4 Transformation de Fourier et dérivation des distributions

1. Soit la fonction $f(x) = x\Pi(x/2)$. Calculer sa dérivée seconde au sens des distributions ; en déduire sa transformée de Fourier.
   Vérifier votre résultat en calculant cette T.F. par une autre méthode.
2. Soit f la fonction définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} 1 - 2\mid x \mid & \text{si } \mid x \mid < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Tracer son graphe. Calculer sa dérivée seconde au sens des distributions et en déduire sa transformée de Fourier.
3. Soit f la fonction définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mid x \mid > 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$
   Déterminer sa transformée de Fourier de façon analogue à la question précedente.