

Exercices de mathématiques n° 7

1 Définition des distributions

Soit φ une fonction quelconque de \mathcal{D} . Les expressions suivantes permettent-elles de définir des distributions ?

1. $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) dx$.
2. $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 |\varphi(x)| dx$.
3. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^N \varphi^{(n)}(0)$.
4. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$.
5. $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$.

2 Limite au sens des distributions

On considère la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{n}{2 + n^2 x^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite.
2. Rappeler la définition du changement d'échelle pour une distribution et démontrer la relation suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

3. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, trouver la limite de cette suite au sens des distributions.
4. On considère l'intégrale :

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{n}{2 + n^2 x^2} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) dx$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

3 Convergence vers la distribution de Dirac

Montrer que la suite de terme général :

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n^2 x^2}{2}\right)$$

converge vers δ .

4 Dérivation au sens des distributions

Calculer la dérivée seconde au sens des distributions des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2 - 5|x| + 4 & , \quad b) f(x) = |x^2 - 4x + 3| \\ c) f(x) = H(x)(x), & d) f(x) = |x - 1| + |(x - 2)(x - 3)|. \end{array}$$

5 Dérivée de $\text{Arctg}(1/x)$

La fonction $f(x) = \text{Arctg}(1/x)$ est-elle localement sommable ? Justifier votre réponse. Déterminer sa dérivée au sens des distributions

6 Équation différentielle au sens des distributions

Soit la fonction f vérifiant l'équation différentielle :

$$f'' + f' - 2f = \sin(x) \quad \text{avec les conditions initiales :} \quad f(0) = f'(0) = 1.$$

On pose $F(x) = H(x)f(x)$. Ecrire l'équation différentielle satisfaite au sens des distributions par F .