Exercices de mathématiques n° 5

1 Série de Fourier

On considère la fonction f de période 4 définie sur une période par

$$f(t) \;=\; \begin{cases} -|t| & \text{pour} \quad |t| \leq 1 \\ -1 & \text{pour} \quad 1 < |t| \leq 2. \end{cases}$$

1. Tracer son graphe sur trois périodes.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f.

2 Phénomène de Gibbs

Dans cet exercice $\mathrm{sgn}(x)$ désigne la fonction *signe de x* égale à -1 si $x < 0$ et 1 si $x > 0$.

1. En utilisant la formule donnant la somme d'une progression géométrique, démontrer l'identité :

$$\cos x \;+\; \cos 3x \;+ \ldots + \cos[(2n-1)x] \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2nx)}{\sin x}.$$

2. Soit f la fonction de période 2π égale à $\mathrm{sgn}(x)$ si $|x| < \pi$.
   Déterminer le développement en série de Fourier en sinus de f.
3. Montrer que la somme partielle S_n des n premiers termes (non nuls) de la série en sinus de f peut s'écrire :

$$S_n(x) \;=\; A \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\; \mathrm{d}t,$$

   où A est une constante que l'on déterminera.
4. Quel est le nombre de maxima de $S_n(x)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ et quelles sont leurs abscisses ?
5. Montrer que le maximum de S_n le plus proche de l'origine tend vers :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\; \mathrm{d}u$$

   quand $n \to \infty$. On admettra que cette quantité est voisine de 1,17.
   Quelle conclusion en tirez vous en pratique pour le calcul numérique ?