Exercices de mathématiques n° 4

1 Intégrales de Lebesgue et normes L^1, L^2, et L^∞

On donne les fonction définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt(x)} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/4}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/4}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in [1,\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]-1/2,+1/2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_5(x) = \exp(-|x|) \qquad f_6(x) = 1$$

$$f_7(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{\sqrt(x)} & \text{si} \quad x \in [1,\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad f_8(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \dfrac{-1}{x} & \text{si} \quad x \in [1,\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_9(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \in [0,\infty[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. (a) Donner l'allure des graphes.
   (b) Dire à quels espaces fonctionnels $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$ appartient chacune de ces fonctions.
   (c) Calculer les normes correspondantes. Les réponses seront justifiées, tout particulièrement en ce qui concerne la fonction f_9, et les résultats présentés sous forme de tableau. On donne la valeur de l'intégrale de Riemann généralisée : $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi/2$.
2. On appelle $C_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini. Quelles sont les fonctions f_1 à f_9 qui appartiennent à $C_0(\mathbb{R})$? (rajouter une colonne au premier tableau).
3. (a) Représenter les espaces $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mathbb{R})$, et $C_0(\mathbb{R})$ par des disques du plan, sur la même figure (comme en théorie des ensembles).
   (b) Placer les fonctions f_1 à f_9 dans les régions ainsi délimitées.
   (c) Peut-on trouver des fonctions appartenant aux deux régions restées vides ? On ne s'intéresse pas à la région extérieure à $L^1(\mathbb{R}) \bigcup L^2(\mathbb{R}) \bigcup L^\infty(\mathbb{R}) \bigcup C_0(\mathbb{R})$.
4. Représenter les espaces $L^1([0,1])$, $L^2([0,1])$, $L^\infty([0,1])$ comme à la question 3. Justifier leur disposition. Trouver une fonction appartenant à chacune des régions ainsi délimitées. On ne s'intéresse toujours pas à la région extérieure.