# Exercices de mathématiques n° 3

## 1 Intégrale au sens de Lebesgue

Soit $f$ une fonction sommable sur $[a,b]$ au sens de Lebesgue. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

## 2 Intégrale de Riemann généralisée et intégrale de Lebesgue

1. Montrer que les intégrales de Riemann généralisées suivantes existent et sont finies :

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

2. Montrer que les intégrales de Riemann généralisées suivantes sont infinies :

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

3. Montrer que les fonctions $\frac{\sin(x)}{x}$ et $\frac{\cos(x)}{x}$ ne sont pas Lebesgue-intégrables sur $[1,\infty[$.

## 3 Fonction définie par une intégrale

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que $f$ est définie et continue pour $x \geq 0$, et dérivable pour $x > 0$.
2. Montrer que pour $x > 0$ la fonction $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire de la forme :

$$f' - f = g$$

   où $g$ est une fonction que l'on déterminera.
3. En utilisant le méthode dite de "variation de la constante" exprimer $f$ en utilisant la "fonction d'erreur" notée erf et définie par :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t\,.$$

## 4 Théorème de dérivabilité pour les intégrales de Lebesgue : applications aux fonctions définies par des intégrales

Soit une fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et à croissance au plus exponentielle ( $\exists\, p_0 \in \mathbb{R}\ tq\ |f(t)| \leq C\exp(p_0 t)$ où $C$ est une constante). On définit la transformée de Laplace $\hat{F}$ de $f$ par :

$$\hat{F}(p) = \int_{[0,\infty[} f(t)\exp(-pt)dt \quad \text{où } p \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $\hat{F}(p)$ est définie et dérivable dans le demi-plan $\Re(p) > p_0$ et que l'on a :

$$\hat{F}'(p) = \int_{[0,\infty[} (-t) f(t)\exp(-pt)dt$$