
Exercices de mathématiques n° 2

1 Étude de la convergence de quelques intégrales généralisées

Les intégrales de Riemann généralisées suivantes convergent-elles ?

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad , \quad \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \quad , \quad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} t}{t^2+1} dt.$$

2 Calcul de quelques intégrales généralisées

Calculer la valeur des intégrales ci-dessous¹.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctg} x}{1+x^2} dx & I_2 &= \int_1^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{x^n} dx \\ I_3 &= \int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} & I_4 &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \end{aligned}$$

3 Intégrale de Riemann généralisée et intégrale de Lebesgue

Soit f la fonction définie presque partout par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$ bien que $\int_0^1 f(x) dx$ soit une intégrale de Riemann généralisée convergente.
