Exercices de mathématiques n° 10

1 Calcul d'intégrales au moyen de la T.F.

Utiliser la transformation de Fourier pour calculer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\ \cos(2\pi a x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi x)\ \cos(\pi x)}{\pi^2 x^2}\ \mathrm{d}x\,.$$

2 Série de Fourier $\sum \exp(inx)/n^2$

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} e^{inx}$$

En exprimant la dérivée seconde de f dans l'intervalle $]0, 2\pi[$, trouver une expression polynomiale de f valable dans cet intervalle.

3 Distributions et séries de Fourier

Soit la fonction

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x}{\pi}\right)\cos(x)$$

où Π est la fonction "porte" ($\Pi(x) = 1$ si $|x| < \dfrac{1}{2}$ et zéro ailleurs).

1. Rappeler la définition de la dérivée d'une distribution et calculer la dérivée seconde au sens des distributions de f.
2. Déduire de la question précédente la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f. On prendra soin de bien justifier la méthode de calcul utilisée.
3. Rappeler la définition du produit de convolution pour les fonctions et les distributions.
   Donner des conditions suffisantes d'existence de ces produits.
4. Soit ${}_{2\pi}(x) = \sum_n \delta(x - 2n\pi)$ le peigne de Dirac de période 2π. On pose

   $$h = {}_{2\pi} * f$$

   où * désigne le produit de convolution. Après avoir démontré que h est une fonction périodique, donner son développement en série de Fourier.