Exercices de mathématiques n° 1

1 Convergence simple et convergence uniforme

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^4}.$$

Étudier la convergence de f_n en convergence simple, puis en convergence uniforme.

2 Intégration et convergence uniforme

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} - 1 + \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad n^2 - n \leq x \leq n^2 \\ \dfrac{-x}{n^2} + 1 + \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad n^2 \leq x \leq n^2 + n \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que la suite f_n converge simplement et uniformément vers une fonction $f(x)$ que l'on précisera. Est-il vrai que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x?$$

Commenter.

3 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

1. Tracer le graphe de la fonction u_n définie par :

$$u_n(x) = n^2 x^2 \exp(-nx^2) \qquad , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. La suite de fonctions u_n converge-t-elle simplement vers zéro en tout point de $\mathbb{R}$?
3. La convergence de la suite est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
4. La convergence de la suite est-elle uniforme sur $(a, +\infty), a > 0$?

4 Étude de deux suites de fonctions

Étudier du point de vue de la convergence simple et de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ les suites :

$$f_n(x) = \cos^n x \, \sin x, \qquad g_n(x) = n\, f_n(x)$$

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.