1. Soient f et g deux fonctions continues, intégrables et $T-$périodiques. On note h le produit de convolution de f par g :

$$h(x) = (f * g)(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)dt$$

Montrer que h est continue et $T-$périodique. Calculer les coefficients de Fourier de h en fonction de ceux de f et g.

2. Soit α réel, $|\alpha| < 1$. Montrer que la série $\sum \alpha^{2n+1} \cos{(2n+1)t}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.

A - Équation de la chaleur

La température $T(x,t)$ d'une barre de longueur L est une fonction de classes $\mathcal{C}^2$ pour les variables $x \in [0,L]$ et $t \in \mathbb{R}^+$ solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

où k est une constante donnée. On cherche à déterminer par la méthode de la série de Fourier la solution particulière avec les conditions suivantes :

1. Conditions initiales : à l'instant $t = 0$, la température est une fonction de x.

$$T(x,0) = f(x)$$

2. Conditions aux limites : aux deux extrémités de la barre, la température est nulle.

$$T(0,t) = T(L,t) = 0$$