A - Primitives de fonctions usuelles

Déterminer les primitives des fonctions : x^α , $1/(a^2 \pm x^2)$, $\pm 1/\sqrt{a^2 - x^2}$ et $1/\sqrt{x^2 \pm a^2}$.

B - Intégrales simples

Calculer

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} \quad I_3(r > 0) = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

et les intégrales de Wallis

$$n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx$$

ainsi que les moments

$$n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

C - Intégrales multiples

1. Calculer (astuce : $\frac{\partial(x/r)}{\partial x} + \frac{\partial(y/r)}{\partial y} =?$)

$$J_1 = \iint \frac{dxdy}{r(x,y)} \quad r(x,y) = \sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2} \quad (\text{astuce : } \frac{\partial(x/r)}{\partial x} + \frac{\partial(y/r)}{\partial y} =?)$$

2. Calculer l'intégrale $I = \iint_D (y - x) dxdy$ sur le domaine D limité par les droites $y = x + 1$, $y = x - 3$, y=-x/3+7/3 et $y = -x/3 + 5$. Astuce : utiliser les changement de variables $u = y + x$ et $v = y + x/3$.
3. Calculer l'aire intérieure à la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$.
4. Calculer la masse d'une plaque circulaire de rayon R et de densité $f(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.
5. On considère une vasque ayant la forme d'un paraboloïde de révolution tronqué à la hauteur h. Quelle est la hauteur de l'eau lorsque la vasques est remplie à la moitié de son volume ?
6. Calculer le moment d'inertie $J_\Delta = \iiint_V d_\Delta^2 dm$ au centre d'une boule homogène par rapport à un axe qui passe par ce centre.

D - Intégrales curvilignes et surfaciques

Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ le long de la boucle fermée constituée par les deux arcs $y = x^2$ et $x = y^2$. Vérifier ce résultat à l'ide de la formule de Riemann.

Calculer le flux du vecteur $(x,y,-z)$ à travers la demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.