A - Fuite dans un réservoir

Un réservoir contient un liquide que s'échappe par un trou percé en son fond. Suivant la mécanique des fluides, la hauteur $h(t)$ de liquide est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dh}{dt} = \alpha\sqrt{h} \tag{1}$$

où $\alpha < 0$ est une constante donnée.

1. Trouver la forme de $h(t)$,
2. déterminer en fonction du niveau $h(0)$ le temps t_1 que met le réservoir à se vider,
3. et comparer ce temps t_1 au temps $t_{1/2}$ que met la moitié du liquide pour s'écouler.

B - Chute d'un parachutiste

Lors de sa chute, un parachutiste voit sa vitesse v vérifier l'équation différentielle

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \tag{2}$$

où g est l'accélération de pesanteur, m la masse du parachutiste et k son coefficient de frottement dans l'air, trois constantes strictement positives.

1. Quelle est l'accélération initiale et la vitesse limite v_ℓ de notre parachutiste ?
2. Calculer la dérivée de $y = \tanh(x)$.
3. En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$.

C - Réaction chimique

Lors de la réaction chimique

$$A + B \longrightarrow X \tag{3}$$

le nombre de mole $x(t)$ de X est régi par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \tag{4}$$

où a et b sont les nombres de mole de A et B à l'instant $t = 0$ et $k > 0$ est un coefficient cinétique.

1. Dans le cas $a = b$, déterminer $x_=(t)$ avec la condition initiale $x_=(0) = 0$.
2. Dans le cas $a > b$, déterminer $x_>(t)$ avec la condition initiale $x_>(0) = 0$.

D - Table à coussin d'air

Sur une table à coussin d'air horizontale, deux mobiles autoporteurs identiques de masse m sont reliés par un ressort de raideur $k > 0$. Un des mobiles est soumis à une force extérieure $F(t)$ horizontale suivant l'axe Δ. On repère les abscisses $u_0(t)$ et $u_1(t)$ de chacun des mobiles suivant cet axe, solutions des équations différentielles couplées

$$m\,\ddot{u}_0 = -k(u_0 - u_1) + F \tag{5}$$
$$m\,\ddot{u}_1 = -k(u_1 - u_0) \tag{6}$$

D -.1 Cas d'un échelon de force

La force appliquée prend la forme

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 & t > 0 \end{cases} \tag{7}$$

et on suppose le système au repos jusqu'à l'instant $t = 0$.

1. Montrer que les fonctions intermédiaires

$$v_s = \frac{u_0 + u_1}{2} \qquad v_a = \frac{u_0 - u_1}{2} \tag{8}$$

   vérifient des équations différentielles découplées.

2. Intégrer chaque équation différentielle, en utilisant les conditions initiales sur u_0 et u_1. On note $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
3. Que valent u_0 et u_1 ?

D -.2 Cas d'une force sinusoïdale

On s'intéresse maintenant au cas d'une force sinusoïdale à la fréquence ω. On définit l'amplitude complexe $\mathcal{F}$ suivant $F(t) = \Re e(\mathcal{F} e^{i\omega t})$, et on associe pareillement $\mathcal{U}_0$ à $u_0(t)$ et $\mathcal{U}_1$ à $u_1(t)$. On note encore $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

1. Déterminer système linéaire vérifié par le vecteur $\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \end{bmatrix}$; on note A la matrice de ce système.
2. Résoudre le système ; on rappelle

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Faire une étude sommaire de $\mathcal{U}_0(\omega)$ et $\mathcal{U}_1(\omega)$. Que se passe-t-il pour $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$, $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ et $\omega \to \infty$?