

A - Coordonnées sphériques

1. Donner les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Sur quelles plages angulaires sont définis les deux angles sphériques ?
2. Dédire de la différentielle de $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ les vecteurs unitaires de la base $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi)$ associées aux coordonnées sphériques. Cette base est-elle orthogonale directe ?
3. Dédire de $df = \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{r}$ l'expression du gradient du champ scalaire f en coordonnées sphériques.
4. Retrouver l'expression de l'élément de volume en coordonnées sphériques à l'aide d'un jacobien ou d'un produit mixte.

B - Opérateurs différentiels

1. Prouver que $\mathbf{grad} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ et $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$.
2. Calculer $\mathbf{grad} \frac{1}{r^n}$, $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^n}$, $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^n}$ et $\Delta \frac{1}{r^n}$.
3. Montrer que $\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{A} + f \operatorname{div} \mathbf{A}$ et $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g + g\Delta f$.
4. Calculer $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{u}_r)$.
5. Utiliser l'identité $\mathbf{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{A}$ pour calculer $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v}$.
6. Soit \mathbf{K} un champ vectoriel uniforme.
 - (a) Montrer que \mathbf{K} dérive d'un potentiel vecteur \mathbf{A} .
 - (b) Vérifier à l'aide de la relation $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{A}$ que l'on peut écrire $2\mathbf{A} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{r}$.