A - Dérivées partielles – théorème de Schwarz

1. Soit la fonction scalaire $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, calculer successivement :
   (a) $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial r}{\partial z}$;
   (b) $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$.
2. (a) L'équation d'état de Van der Walls d'un gaz rél a pour expression :
   $$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$
   où a, b et r sont des constantes. Calculer $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T$ et $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$.
   (b) Effectuer les mêmes calculs avec l'équation d'état de Dieterici :
   $$p(v - b) = RTe^{-\frac{a}{RTv}}$$
   (c) Vérifier le théorème de Schwarz dans les deux cas précédents.
3. Soit la fonction scalaire $V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; calculer $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\theta$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_r$.

B - Différentielle

1. Calculer la différentielle des fonctions f suivantes :
   (a) $f(x,y) = xy^2$;
   (b) $f(x,y) = a\cos(\omega t - kx)$;
   (c) $f(x,y) = \ln\frac{xy}{x+y}$.
2. Sachant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, calculer la différentielle dr.
3. Calculer la différentielle de p dans les deux cas suivants :
   (a) $p(v,T) = \frac{nRT}{v}$;
   (b) $p(v,T) = \frac{nRT}{v-nb} - \frac{n^2 a}{v^2}$.
4. La période T_1 d'un pendule simple de longueur $\ell_1 = 1\,\mathrm{m}$ dans un champ de pesanteur $g_1 = 9{,}8094\,\mathrm{m/s^2}$ (à Paris par exemple) est donné par : $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g_1}}$. Si l'on diminue sa longueur de 3 mm et si le pendule esr placé en un lieu où $g_2 = 9{,}8011\,\mathrm{m/s^2}$ (à Washington), déterminer en appliquant le calcul différentiel sa nouvelle période T_2.
5. Soit la fonction composée $F = f(u,w)$ où u et v dépendent de deux variables indépendantes x et y. Exprimer la différentielle de F sous la forme $dF = Pdx + Qdy$; en déduire les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$.
6. Soit la fonction composée $F = f(u)$ où u dépend des deux variables indépendantes x et t. Si $u(x,t)$ vaut successivement $x + vt$ et $x - vt$, montrer que dans ces deux cas F vérifie l'équation :
   $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

C - Fonction d'état

1. Soit une fonction scalaire de la forme $f(x,y,z) = 0$. Trouver les relations fondamentales entre les dérivées partielles :
   (a) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ et $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$;
   (b) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$.
2. Vérifier ces deux résultats dans les deux cas suivants :
   (a) l'équation d'état des gaz parfaits
   $$pv - nRT = 0$$
   (b) l'équation d'état de Van der Walls :
   $$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT = 0$$

D - Formes différentielles

1. x, y et z sont trois variables indépendantes. Parmi les formes différentielles suivantes, trouver celles qui sont des différentielles :
   (a) $3x^2y^2zdx + 2x^3yzdy + x^3y^2dz$;
   (b) $xydx + 2xy^2dy$;
   (c) $y^2dx + x^2dy$;
   (d) $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy$;
2. Sachant que les variables p, v et T sont liées par la relation $pv = nRT$, montrer que :
   (a) l'expression $\delta Q_{rev} = C_v(T)dT + pdv$ n'est pas une différentielle ;
   (b) $\frac{\delta Q_{rev}}{T}$ est une différentielle.