Université Aix Marseille III Paul Cézanne
Faculté des sciences - andre.nicolet@fresnel.fr

Module PH302
physique du mouvement
année 2009-2010

Planche 2 : révisions - repère de Frénet et référentiels accélérés.

Remarque : les grandeurs vectorielles sont notées **en gras**.

1. Repère de Frénet
   (a) Pour une trajectoire $\mathbf{r}(t)$, définissez l'*abscisse curviligne* $s(t)$ (fonction du temps).
   (b) On change l'échelle de temps en posant $t = a\tau$ (avec a une constante positive) et on note la trajectoire $\mathbf{r}'(\tau)$. Montrez que l'abscisse curviligne s' définie à partir de cette trajectoire est identique à s soit $s'(\tau) = s(a\tau) = s(t)$.
   (c) On change la cinématique en posant $t = f(\tau)$ (avec f une fonction monotone croissante) et on note la trajectoire $\mathbf{r}'(\tau)$. Montrez que l'abscisse curviligne s' définie à partir de cette trajectoire est identique à s soit $s'(\tau) = s(f(\tau)) = s(t)$.
   (d) Montrez que la vitesse $\mathbf{v}$ peut s'écrire $\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$ avec $\mathbf{T}$ le vecteur normé tangent à la trajectoire.
   (e) Montrez que $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}v$ et que $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{R}$ où $\mathbf{N}$ est un vecteur normé orthogonal à $\mathbf{T}$ et R une fonction de s qui a les dimensions d'une longueur (le *rayon de courbure*).
   (f) Soit $\mathbf{a}$ l'accélération. Montrez que $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}$.
   (g) On pose $\kappa = 1/R$, la *courbure*. Montrez que $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$ avec $\mathbf{B}$ (la *binormale*) un vecteur normé orthogonal à $\mathbf{T}$ et à $\mathbf{N}$ et τ un coefficient scalaire ayant les dimensions de l'inverse d'une longueur (la *torsion*).
   (h) Montrez que $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$.
   (i) Montrez que si on définit le vecteur $\mathbf{D} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ (le *vecteur de rotation de Darboux*), on a
   $$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{N}, \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{B}.$$
   (j) Calculez le repère de Frénet associé à la trajectoire hélicoïdale $\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + R\sin(\omega t)\mathbf{e}_y + \omega bt\mathbf{e}_z$.
2. Référentiels accélérés
   (a) Soit $\boldsymbol{\epsilon}_1(t), \boldsymbol{\epsilon}_2(t), \boldsymbol{\epsilon}_3(t)$ une base orthonormée dépendant du temps. Montrez qu'il existe un vecteur dépendant du temps $\boldsymbol{\omega}(t)$ (le *vecteur de Poisson*) tel que $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\epsilon}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon}_i$ pour $i = 1, 2, 3$.
   (b) Soit $\mathbf{u}(t) = u_1(t)\boldsymbol{\epsilon}_1(t) + u_2(t)\boldsymbol{\epsilon}_2(t) + u_3(t)\boldsymbol{\epsilon}_3(t)$ un vecteur variable dans le temps, montrez que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$ avec $\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t} = \dot{u}_1(t)\boldsymbol{\epsilon}_1(t) + \dot{u}_2(t)\boldsymbol{\epsilon}_2(t) + \dot{u}_3(t)\boldsymbol{\epsilon}_3(t)$.
   (c) Montrez que $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t}$.
   (d) Soit $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un référentiel galiléen et $(M(t), \boldsymbol{\epsilon}_1(t), \boldsymbol{\epsilon}_2(t), \boldsymbol{\epsilon}_3(t))$ un référentiel en mouvement quelconque par rapport au premier. Soit $\mathbf{r}$ le vecteur position par rapport au premier référentiel, $\boldsymbol{\rho}$ le vecteur position par rapport au second et $\mathbf{m}(t) = \mathbf{OM}$ le vecteur position de l'origine du second référentiel exprimé dans le premier référentiel. Montrez que la vitesse par rapport au référentiel galiléen et l'accélération absolue sont données relativement au référentiel en mouvement par :
   $$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho},$$
   $$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \underbrace{\frac{\delta^2\boldsymbol{\rho}}{\delta^2 t}}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\frac{d^2\mathbf{m}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \boldsymbol{\rho}}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}}_{\text{accélération de Coriolis}}.$$
   (e) Montrez que dans le système d'axes des coordonnées cylindriques (r, φ, z) en rotation (éventuellement non uniforme) autour de l'axe $\mathbf{e}_z$, le vecteur de Poisson est donné par $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z$.
   (f) Montrez que dans le système d'axes des coordonnées cylindriques précédent, la vitesse est donnée par $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}\mathbf{e}_z$ et l'accélération par $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$.
   (g) Montrez que pour le repère de Frénet considéré comme un référentiel mobile, le vecteur de Poisson est le vecteur de Darboux multiplié par le module de la vitesse : $\boldsymbol{\omega} = v\mathbf{D}$.
   (h) Que devient la formule de l'accélération absolue dans un référentiel accéléré appliquée au cas du repère de Frénet ?