

- Parmi les données suivantes, quelles sont celles qui sont des vecteurs et celles qui sont des scalaires : le poids, la quantité de mouvement, le volume, le champ magnétique, la quantité de chaleur, la densité, la distance, la chaleur spécifique, l'énergie, la vitesse ?
- Un avion se dirige vers le nord-ouest avec une vitesse de 200 km/h par rapport au sol, due à l'existence d'un vent d'ouest de 80 km/h par rapport au sol. Quelle serait la vitesse de l'avion et dans quelle direction se dirigerait-il s'il n'y avait pas de vent ?
- Un poids de 100 kg est suspendu au milieu d'une corde fixée en deux points du plafond. La corde fait un angle de  $60^\circ$  par rapport à la verticale. Déterminer la tension  $T$  exercée sur la corde.
- Trouver une équation du plan perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  et passant par l'extrémité du vecteur  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 36\mathbf{k}$ .
- Trouver la distance de l'origine à ce plan.
- Soient  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  avec  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$  les cotés du triangle plan  $ABC$ . Démontrer la formule des sinus
 
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
- Montrer
 
$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

## A - Vecteurs de $E_3$

Soient  $\mathbf{A} = (2, -2, 3), \mathbf{B} = (1, 4, 2), \mathbf{C} = (4, 1, x)$  et  $\mathbf{X} = (1, 1, 1), \mathbf{Y} = (0, 1, 1), \mathbf{Z} = (0, 0, 1)$  six vecteurs de  $E_3$ .

- Calculer  $3\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,  $\|\mathbf{X}\|$  et  $\|\mathbf{Y}\|$ ,  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ,  $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ .
- Déterminer le nombre  $x$  de telle sorte que les trois vecteurs  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  soient linéairement dépendants.
- Calculer les composantes du vecteur  $\mathbf{A}$  sur la base  $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$ .
- Déterminer une base orthogonale de  $E_3$  à partir des trois vecteurs  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ .
- Déterminer une base orthonormée à partir de cette base orthogonale.

## B - Produit scalaire et produit vectoriel

- Trouver le travail fourni par le déplacement d'un objet le long du vecteur  $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$  si la force appliquée est  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ .
- Trouver l'expression du moment d'une force  $\mathbf{F}$  par rapport à un point  $P$ .
- Déterminer les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  que fait le vecteur  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  avec les directions positives des axes de coordonnées, et montrer que :
 
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

## C - Matrices

- On donne  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ ; trouver  $A + B$ ,  $2A - 3B$  et  $AB^T$ .
- Calculer
 
$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -9 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}^T$$
- Calculer  $AC$  et  $CA$  avec  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .
- Calculer les produits matriciels
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Soit  $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ , calculer  $C^2$ ,  $C^3$  et  $f(C)$ .
- Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Calculer son polynôme caractéristique  $\Delta(t) = \det(tI - A)$ . Vérifier que  $M$  est racine de  $\Delta$ .