Distributions, transformation de Fourier (continue et discrète)

Notations

Fonction d'une variable réelle à valeurs complexes $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{C}$
Intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
Complexe conjugué : $z = a + \imath\, b$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - \imath\, b$
Fonction caractéristique d'un ensemble Ω : $\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \Omega \\ 0 & \text{pour } x \notin \Omega \end{cases}$
Support d'une fonction : $\mathrm{supp}(f) = \{x | f(x) \neq 0\}$
Translation d'une fonction : $\tau_a f(x) = f(x - a)$
Changement d'échelle d'une fonction : $\sigma_a f(x) = \frac{1}{|a|} f(x/a)$ et $\varsigma_a f(x) = f(a\, x)$

Espaces fonctionnels

Espace vectoriel $\mathbf{V} = \{u | \forall u, v \in \mathbf{V},\ \ \forall a, b \in \mathbb{C},\ a\, u + b\, v \in \mathbf{V}\}$
Fonctionnelle linéaire $D : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}\ | \forall u, v \in \mathbf{V},\ \ \forall a, b \in \mathbb{C},\ D(a\, u + b\, v) = a\, D(u) + b\, D(v))$
Fonctionnelle continue $D : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C}\ |\ \lim_{n\rightarrow\infty} v_n = v \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} D(v_n) = D(v)$
Produit scalaire $< u, v >= \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v}(x)dx$ et norme $\| u \|^2 =< u, u >$
Produit tensoriel $(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y)$

Distributions

Distribution $D \in \mathcal{D}'$ = Fonctionnelles linéaires continues sur les fonctions-test $\varphi \in \mathcal{D}$ (indéfiniment dérivables et à support compact i.e. $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [a, b]$) : $D(\varphi) \in \mathbb{C}$
Distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$ = Fonctionnelles linéaires continues sur les fonctions à décroissance rapide $\varphi \in \mathcal{S}$ (indéfiniment dérivables et décroissant plus vite à l'infini que toute puissance de $|x|$)
Distribution régulière associée à une fonction sommable f : $D_f(\varphi) =< f(x), \varphi(x) >=< f, \varphi >$
Un abus de notation usuel est d'écrire, pour toute distribution D (régulière ou non) :
$D(\varphi) =< D(x), \varphi(x) >=< D, \varphi >$
Dérivée d'une distribution : $< \frac{dD}{dx}, \varphi >= - < D, \frac{d\varphi}{dx} >$
Multiplication d'une distribution par une fonction : $< f\, D, \varphi >=< D, f\varphi >$
Translation : $< \tau_a D, \varphi >=< D, \tau_{-a}\varphi >$
Changement d'échelle : $< \sigma_a D, \varphi >=< D, \varsigma_a \varphi >$ et $< \varsigma_a D, \varphi >=< D, \sigma_a \varphi >$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Distribution de Dirac : } < \delta, \varphi >= \varphi(0) \\ \text{Fonction échelon de Heaviside : } H(x) = \chi_{[0,\infty[}(x) \end{array}\right\} \frac{dH(x)}{dx} = \delta$$

Transformation de Fourier

Transformée de Fourier $\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}[f](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\imath\pi\nu x} dx$
Transformée inverse $f(x) = \overline{\mathcal{F}}[\hat{f}](x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{+2\imath\pi\nu x} d\nu$
Inversion $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[f]] = f$ $\qquad \mathcal{F}[\overline{\mathcal{F}}[\hat{f}]] = \hat{f}$ $\qquad \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = \varsigma_{-1} f$
Transformée de Fourier d'une distribution tempérée :$< \mathcal{F}[D], \varphi >=< D, \mathcal{F}[\varphi] >$
Fonction ou distribution paire $f = \varsigma_{-1} f$: $\mathcal{F}[f] = \overline{\mathcal{F}}[f]$
Translation $\mathcal{F}[\tau_a f] = e^{2\imath\pi\nu a} \hat{f}(\nu)$ et modulation $\mathcal{F}[e^{2\imath\pi a x} f(x)] = \tau_a \hat{f}(\nu)$
Dérivation $\mathcal{F}[\frac{df(x)}{dx}] = 2\imath\pi\nu \hat{f}(\nu)$ et multiplication par la variable $\mathcal{F}[2\imath\pi x f(x)] = -\frac{d\hat{f}(\nu)}{d\nu}$
Changement d'échelle : $\mathcal{F}[\varsigma_a f] = \sigma_a \hat{f}$ et $\mathcal{F}[\sigma_a f] = \varsigma_a \hat{f}$
Théorème de Parseval : $< \mathcal{F}[u], \mathcal{F}[v] >=< u, v >$ et $\| \mathcal{F}[u] \| = \| u \|$
Fonction gaussienne : $\mathrm{g}(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\mathcal{F}[g] = g$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fonction sinus cardinal : } \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ pour } x \neq 0 \text{ prolongé par } \mathrm{sinc}(0) = 1 \\ \text{Fonction porte : } \Pi(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)\end{array}\right\} \mathcal{F}[\Pi] = \mathrm{sinc}$$

$\mathcal{F}[1] = \delta$ $\qquad \mathcal{F}[\delta] = 1$

Convolution

Convolée de deux fonctions : $u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y)\ v(x-y)dy$

Convolée de deux distributions : $< D * E, \varphi > = < D \otimes E, \varphi(x+y) > = < D(y), < E(x), \varphi(x+y) >>$

Commutativité $u * v = v * u$

Associativité $(u * v) * w = u * (v * w) = u * v * w$

Transformée de Fourier d'une convolution (théorème de Plancherel) : $\mathcal{F}[u * v] = \hat{u}\ \hat{v}$

$1\ \hat{D} = \hat{D} \Leftrightarrow \delta * D = D$

Echantillonnage

Peigne de Dirac : $Ш = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tau_i \delta$ et $\mathcal{F}[Ш] = Ш$

$\Pi\ Ш = \delta \Leftrightarrow \mathrm{sinc} * Ш = 1$

Echantillonnage de la fonction à la période T = distribution $f_T = \sigma_T Ш f$

Spectre périodisé $\hat{f}_T = \mathcal{F}[\sigma_T Ш\ f] = \varsigma_T Ш * \hat{f}$

Fonction à spectre borné : f telle que $\exists\ \nu_{max}$ tel que $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [-\nu_{max}, \nu_{max}]$

Théorème de Shannon-Nyquist : une fonction à spectre borné f est entièrement déterminée par un échantillonnage f_T de période $T \leq \frac{1}{2\ \nu_{max}}$.

Dans ce cas $\hat{f} = \varsigma_T \Pi\ \hat{f}_T$ et $f = \sigma_T \mathrm{sinc} * f_T$ (interpolation).

Transformée de Fourier discrète

Séquence de N nombres complexes f_k considérée comme périodique $f_k = f_{k+N}$

Racine de l'unité $w = e^{-2\imath\pi/N}$ et $w^N = 1$

Transformée de Fourier discrète : Séquence de N nombres complexes $F_n = \mathcal{F}_N[f_k]_n = \sum_{k=0}^{k=N-1} f_k w^{n\ k}$

Transformée de Fourier discrète inverse : $\overline{\mathcal{F}}_N[F_n]_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} F_n \bar{w}^{n\ k}$

Inversion : $\overline{\mathcal{F}}_N[\mathcal{F}_N[f_k]_n]_k = f_k$

Convolution discrète : $(u * v)_k = \sum_{n=0}^{n=N-1} u_{k-n} v_n$

Plancherel discret : $(u * v)_k = \mathcal{F}_N[u]_k \mathcal{F}_N[v]_k$

Parseval discret : $\sum_{k=0}^{k=N-1} |f_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} |\mathcal{F}_N[f_k]_n|^2$

Transformée de Fourier rapide

Transformée de Fourier rapide = algorithme de calcul de la $\mathcal{F}$ utilisant le lemme de Danielson-Lanczos :

Pour N pair on a $\mathcal{F}_N[f_k]_n = \mathcal{F}_{N/2}[f_{2k}]_n + w^n\ \mathcal{F}_{N/2}[f_{2k+1}]_n$

Si N est une puissance entière de 2 $\rightarrow$ Utilisation répétée du lemme (algorithme de Cooley et Tukey) $\rightarrow$ Calcul numérique de $\mathcal{F}_N$ en $N\ log_2 N$ multiplications complexes à la place de N^2 pour le calcul direct

andre.nicolet@fresnel.fr