Analyse vectorielle

Coordonnées rectangulaires cartésiennes : Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'un système de coordonnées rectangulaires cartésiennes (une origine O et un triplet de vecteurs orthonormés $\mathbf{e}^x,\ \mathbf{e}^y,\ \mathbf{e}^z$). Un point de l'espace est repéré par un vecteur position $\mathbf{r} = x\mathbf{e}^x + y\mathbf{e}^y + z\mathbf{e}^z$ dont les composantes sont les coordonnées.

Soit $f(x, y, z),\ g(x, y, z)$ des champs/fonctions scalaires et $\mathbf{u} = u_x(x, y, z)\mathbf{e}^x + u_y(x, y, z)\mathbf{e}^y + u_z(x, y, z)\mathbf{e}^z,\ \mathbf{v} = v_x(x, y, z)\mathbf{e}^x + v_y(x, y, z)\mathbf{e}^y + v_z(x, y, z)\mathbf{e}^z,\ \mathbf{w} = w_x(x, y, z)\mathbf{e}^x + w_y(x, y, z)\mathbf{e}^y + w_z(x, y, z)\mathbf{e}^z$ des champs de vecteurs.

Opérations algébriques

Produit scalaire : $\mathbf{v}.\mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ et norme associée $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

Produit vectoriel : $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\mathbf{e}^x + (v_z w_x - v_x w_z)\mathbf{e}^y + (v_x w_y - v_y w_x)\mathbf{e}^z$

Produit mixte : $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Opérateurs différentiels

Gradient : $\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}^x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}^y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}^z$

Rotationnel : $\mathbf{rot}\, \mathbf{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z})\mathbf{e}^x + (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x})\mathbf{e}^y + (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})\mathbf{e}^z$

Divergence : $\mathrm{div}\, \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial w} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$

Propriétés :

Linéarité : Soit a et b des scalaires :

$\mathbf{grad}\,(af + bg) = a\,\mathbf{grad}\,f + b\,\mathbf{grad}\,g$

$\mathbf{rot}\,(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{rot}\,\mathbf{w}$

$\mathrm{div}\,(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + b\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}$

Règle de Leibnitz pour les produits :

$\mathbf{grad}\,(fg) = f\mathbf{grad}\,g + g\,\mathbf{grad}\,f$

$\mathbf{rot}\,(f\mathbf{v}) = f\mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{grad}\,f$

$\mathrm{div}\,(f\mathbf{v}) = f\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,f$

$\mathrm{div}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{w}$

$\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\,f = 0$

$\mathrm{div}\ \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$

Laplacien scalaire : $\Delta f = \mathrm{div}\ \mathbf{grad}\,f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Laplacien vectoriel : $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} - \mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\,\mathbf{v} =$

$(\Delta v_x)\mathbf{e}^x + (\Delta v_y)\mathbf{e}^y + (\Delta v_z)\mathbf{e}^z$

Théorèmes intégraux

Courbe : Une *courbe* $\gamma : t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}^x + y(t)\mathbf{e}^y + z(t)\mathbf{e}^z$ est définie par l'application d'un segment $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3$ donnée par trois fonctions $x(t), y(t), z(t)$ qui décrivent l'évolution du vecteur position $\mathbf{r}(t)$ en fonction du paramètre t. Le mot "courbe" désigne à la fois l'application et les points de $\mathbb{R}^3$ résultants c'est-à-dire l'image de I

dans $\mathbb{R}^3$.

L'expression $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{dx(t)}{dt}\mathbf{e}^x + \dfrac{dy(t)}{dt}\mathbf{e}^y + \dfrac{dz(t)}{dt}\mathbf{e}^z$ donne le vecteur tangent en chaque point de la courbe.

Integrale curviligne : Etant donné la courbe γ et un champ de vecteurs $\mathbf{v}$, l'intégrale curviligne de $\mathbf{v}$ sur γ est définie par l'intégrale :

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (v_x(x(t), y(t), z(t))\frac{dx(t)}{dt} + v_y(x(t), y(t), z(t))\frac{dy(t)}{dt} + v_z(x(t), y(t), z(t))\frac{dz(t)}{dt})dt$$

Propriété fondamentale : la valeur de l'intégrale curviligne est indépendante du choix du paramètre de la courbe et dépend uniquement des points de $\mathbb{R}^3$ qui constituent la courbe (le signe dépend de son orientation).

Théorème du gradient :

$$\int_\gamma \mathbf{grad}\, f \cdot d\mathbf{r} = f(b) - f(a)$$

Surface : Une *surface* $\Sigma : (s,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbf{r}(s,t) = x(s,t)\mathbf{e}^x + y(s,t)\mathbf{e}^y + z(s,t)\mathbf{e}^z$ est définie par l'application d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ donnée par trois fonctions de deux variables $x(s,t), y(s,t), z(s,t)$ qui décrivent l'évolution du vecteur position $\mathbf{r}(s,t)$ en fonction des paramètres s et t. Le mot "surface" désigne à la fois l'application et les points de $\mathbb{R}^3$ résultants c'est-à-dire l'image de Ω dans $\mathbb{R}^3$.

Les expressions $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial s} = \dfrac{\partial x(s,t)}{\partial s}\mathbf{e}^x + \dfrac{\partial y(s,t)}{\partial s}\mathbf{e}^y + \dfrac{\partial z(s,t)}{\partial s}\mathbf{e}^z$ et $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \dfrac{\partial x(s,t)}{\partial t}\mathbf{e}^x + \dfrac{\partial y(s,t)}{\partial t}\mathbf{e}^y + \dfrac{\partial z(s,t)}{\partial t}\mathbf{e}^z$ donnent deux vecteurs tangents en chaque point de la courbe (linéairement indépendants si la surface n'est pas dégénérée).

L'élément de surface est défini par $(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}) ds\, dt = d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ avec $\mathbf{n} = d\mathbf{S}/|d\mathbf{S}|$ le vecteur normal (normé) à la surface et $dS = |d\mathbf{S}|$.

Integrale de flux : Etant donné la surface Σ et un champ de vecteurs $\mathbf{v}$, l'intégrale de flux de $\mathbf{v}$ à travers Σ est définie par l'intégrale double :

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\int_\Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \\
&\int\int_\Omega [\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}] ds\, dt = \\
&\int\int_\Omega \{v_x(x(s,t), y(s,t), z(s,t))(\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\frac{\partial z(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial z(s,t)}{\partial s}\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}) + \\
&v_y(x(s,t), y(s,t), z(s,t))(\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}) + \\
&v_z(x(s,t), y(s,t), z(s,t))(\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\frac{\partial y(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\frac{\partial x(s,t)}{\partial t})\} ds\, dt
\end{aligned}
$$

Propriété fondamentale : la valeur de l'intégrale de flux est indépendante du choix des paramètres de la surface et dépend uniquement des points de $\mathbb{R}^3$ qui constituent la surface (le signe dépend de son orientation).

Théorème de Stokes :

$$\int_\Sigma \mathbf{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

où $\partial\Sigma$ est le bord de Σ c'est-à-dire la courbe qui délimite Σ.

Théorème de la divergence (Gauss) :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

où V est un volume (un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ à trois dimensions), ∂V est le bord de ce volume, c'est-à-dire la surface qui délimite ce volume et $\int_V f\, dV$ désigne l'intégrale triple de la fonction $f(x, y, z)$ sur V.

Intégrales scalaires :

On peut également définir des intégrales sur des champs scalaires :

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\ dt = \int_\gamma f\ dr$$

Exemple : si $f = 1.$, alors $\int_\gamma\ dr$ est la *longueur* de la courbe.

$$\int_\Omega f(\mathbf{r}(s,t))|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}|\ ds\ dt = \int_\Sigma f\ dS$$

Exemple : si $f = 1.$, alors $\int_\Sigma\ dS$ est l'*aire* de la surface.

Référence : *Cours de Physique : Mathématiques pour la physique*, Yves Noirot, Jean-Paul Parisot, Nathalie Brouillet, Dunod (Deug Sciences), Paris, 1997.

andre.nicolet@fresnel.fr