

Outils mathématiques

Frédéric Zolla

10 septembre 2009

Table des matières

I	Outils mathématiques	3
1	Séries de Fourier	5
1.1	Préambule	5
1.2	Polynômes trigonométriques	6
1.2.1	Fonction périodique	6
1.2.2	Fonction exponentielle complexe	6
1.2.3	Fonction trigonométrique	7
1.2.4	Représentation en Sinus et Cosinus	7
1.2.5	Propriété d'orthogonalité	8
1.2.6	Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques	9
1.2.7	Égalité de Parseval	9
1.3	Séries de Fourier	10
1.3.1	Le cadre de l'espace $L^p_{\#}([0, T])$	10
1.3.2	Théorème fondamental	10
1.3.3	Approximation dans $L^2_{\#}([0, T])$	10
1.3.4	Théorème de Dirichlet	11
1.3.5	Quelques exemples de séries de Fourier	12
1.3.6	Analyse spectrale – Coefficients de Fourier	12
1.4	Un exemple d'utilisation	13
1.4.1	La corde vibrante fixée entre deux points : généralités	13
1.4.2	Cas de la corde pincée	14
1.4.3	Cas de la corde frappée	15
1.4.4	Comparaison entre les cordes pincées et les cordes frappées	16
2	Transf. de Fourier des fonctions ...	19
2.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$	20
2.2	Définition de la transformée de Fourier d'une fonction sommable	20
2.3	Transformée de Fourier inverse	20
2.4	Exemples de transformée de Fourier	21
2.4.1	Transformée de Fourier la fonction porte Π	21
2.4.2	Transformée de Fourier de la fonction gaussienne	21
2.4.3	Transformée de Fourier de la fonction $\exp(- x)$	22
2.5	Quelques propriétés des transformées de Fourier	22
2.5.1	Linéarité de la Transformée de Fourier	22
2.5.2	Transformée de Fourier des fonctions réelles	22
2.5.3	Changement d'échelle	22
2.5.4	Parité	23
2.5.5	Translation	23
2.5.6	Modulation	23
2.5.7	Dérivation	23
2.5.8	Théorème de Parseval-Plancherel	24
2.6	Transformation de Fourier bidimensionnelle	24

2.6.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$	24
2.6.2	Définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction sommable	24
2.6.3	Transformée de Fourier d'une fonction radiale	24
3	Notions sur les distributions	27
3.1	Introduction	27
3.2	Notion de distributions	30
3.2.1	Définition du support d'une fonction	30
3.2.2	L'espace \mathcal{D}	30
3.2.3	Un exemple de fonction de \mathcal{D}	31
3.2.4	Convergence dans \mathcal{D}	31
3.2.5	Les distributions de Schwartz (distributions de \mathcal{D}')	31
3.2.6	Exemples de distributions de Schwartz	31
3.3	Opérations sur les distributions	32
3.3.1	La distribution $T(\frac{x}{a})$	32
3.3.2	Dérivation d'une distribution	32
3.3.3	Un exemple fructueux d'utilisation de dérivée au sens des distributions : (la distribution $Vp(\frac{1}{x})$)	34
3.4	Produit de deux distributions	35
3.4.1	Produit de deux distributions régulières	35
3.4.2	Produit d'une distribution quelconque T par une fonction indéfiniment dérivable α	35
3.5	Suite de distributions	36
3.5.1	Définition	36
4	Distributions de plusieurs variables	37
4.1	Définition	37
4.2	Exemple de distributions de plusieurs variables	38
4.2.1	Distributions régulières	38
4.2.2	Deux exemples de distributions singulières $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ et $\alpha\delta_S$	38
4.2.3	Dérivée partielle d'une distribution	38
4.2.4	Dérivation d'une fonction sommable discontinue	39
5	Produit de convolution	45
5.1	Définition	45
5.2	Propriétés du produit de convolution	45
5.3	Produit de convolution de deux distributions	46
5.4	Produit de convolution de trois distributions	47
5.5	Exemples de convolution de distributions	47
5.5.1	$S * \delta$	47
5.5.2	$S * \delta'$	47
5.5.3	Opérateurs différentiels à coefficients constants	48
5.6	Exemples d'utilisation du produit de convolution en Physique	48
5.6.1	Le filtre linéaire et continu	48
5.6.2	L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = f$	49
5.7	Transformée de Fourier d'un produit de convolution	49
5.8	Produit de convolution de fonctions de plusieurs variables	50
6	Transformée de Fourier des distributions tempérées	51
6.1	Introduction	51
6.2	Définition de l'espace \mathcal{S} des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide	52
6.3	Définition des distributions tempérées	52

6.4	Définition des fonctions à croissance lente à l'infini	52
6.5	Dérivée d'une distribution tempérée	53
6.6	Transformation de Fourier d'une distribution tempérée	53
6.7	Transformation inverse de Fourier dans \mathcal{S}'	53
6.8	Propriétés de la Transformation de Fourier des distributions tempérées	53
6.8.1	Dérivée de la transformée de Fourier d'une distribution.	53
6.8.2	Transformée de Fourier de la dérivée d'une distribution.	54
6.8.3	Translation de la transformée de Fourier d'une distribution	54
6.8.4	Transformée de Fourier de la translation d'une distribution	54
6.9	Exemples de Transformées de Fourier dans \mathcal{S}'	54
6.9.1	Transformation de Fourier de δ	54
6.9.2	Transformation de Fourier de δ'	54
6.9.3	Transformation de Fourier de $\exp(2i\pi ax)$	55
6.9.4	Transformation de Fourier de la fonction $\text{sgn}(x)$	55
6.9.5	Transformation de Fourier de la fonction de Heaviside $\mathbf{H}(x)$	56

Table des figures

1.1	Interprétation géométrique	11
1.2	Corde vibrante : flash à l'instant t	13
1.3	Graphe des fonctions f et \tilde{f} ($0 < \alpha < 1$).	15
1.4	Graphe des fonctions g et \tilde{g} ($0 < \alpha < 1, 0 < \delta < \min(2\alpha, 2(1 - \alpha))$).	16
2.1	La fonction porte Π	21
2.2	Passage aux coordonnées polaires dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier.	24
3.1	Choc élastique d'une bille contre un mur.	28
3.2	Graphe de la fonction v	28
3.3	Graphe de la fonction v_ϵ	28
3.4	Graphe de la fonction f_ϵ	28
3.5	Représentation graphique de la «fonction de Dirac».	30
4.1	Exemple 1 : Le plan $z = 0$ partage clairement deux demi-espaces : le demi-espace $z < 0$ et le demi-espace $z > 0$	39
4.2	Exemple 2 : La surface partage clairement deux domaines : un domaine borné Ω_2 (intérieur) et un domaine non borné Ω_1 (extérieur).	40
4.3	Contre-exemple 1 : Verser du thé à l'«intérieur» de la tasse n'a pas de sens.	41
4.4	Contre-exemple 2 : le demi-plan ($z = 0, y > 0$) ne partage pas «clairement» l'espace.	42
4.5	La normale «pointe» vers le milieu Ω_1	43
5.1	Le support de la fonction $\phi(u)$ est borné ($[a, b]$), alors que le support de la fonction $\phi(u + v)$ est non borné.	46

Avis au lecteur

Quelques conseils pour bien aborder ce cours ...

Ce fascicule s'adresse aux étudiants inscrits en Master de Physique de l'Université de Provence. Il a pour vocation d'être un support écrit qui permet d'éviter à l'étudiant d'accomplir la tâche souvent fastidieuse de «prendre le cours». Cela n'empêche pas, toutefois, de prendre des notes pour compléter ledit fascicule. Son esprit ainsi libéré de ce fardeau, il pourra se concentrer davantage sur ce qui se dit pendant le cours et se consacrer à la nécessaire réflexion que présuppose un cours de Licence. Ce cours n'a, en revanche, pas vocation à se suffire à lui-même. L'étudiant devra faire son chemin de Damas en lisant des ouvrages et en faisant de nombreux exercices, exercices sans lesquels toute véritable et durable assimilation est vaine. Afin de vous aider dans cette démarche, il vous est proposé une liste non exhaustive d'ouvrages de différents niveaux ayant soit trait aux mathématiques pour la Physique (Partie 1) soit trait à l'électromagnétisme (Partie 2)¹.

– Liste de livres sur les Mathématiques pour la Physique

1. [1, DEUG ET MATH](Niveau DEUG, pour une remise à niveau)
2. [2, COURS DE PHYSIQUE, MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE](Niveau DEUG)
3. [3, MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE, *Tome I, II & III*](Niveau Licence)
4. [4, OUTIL MATHÉMATIQUE POUR LA PHYSIQUE] (Niveau Licence)

– Liste de livres en français sur l'électromagnétisme

1. [5, ÉQUATIONS DE MAXWELL, ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES](Niveau DEUG)
2. [6, MILIEUX DIÉLECTRIQUES](Niveau DEUG & Licence)
3. [7, ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES EN RADIOÉLECTRICITÉ ET EN OPTIQUE](Niveau Licence)
4. [8, THÉORIE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME](Niveau Licence et au delà)
5. [9, LE COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN] (Tous niveaux. A lire comme un roman avant de s'endormir. Quelques moments d'intense émotion ...)
6. [10, Agrégation de Physique, Leçon d'électromagnétisme] (Comme son titre l'indique, fait pour les candidats à l'Agrégation)
7. [11, ÉLECTROMAGNÉTISME, FONDEMENTS ET APPLICATIONS] (Niveau DEUG et Licence. Ce livre s'est peu à peu imposé comme un livre incontournable des bibliothèques universitaires françaises. A consulter pour la vastitude des sujets abordés)

– Liste de livres en anglais sur l'électromagnétisme

1. Voir page Bibliographie pour références complètes

1. [12, CLASSICAL ELECTRODYNAMICS] (Niveau Licence et bien au-delà. Une référence mondiale en la matière. A utiliser à bon escient. A noter qu'il existe une version dans la langue de Voltaire.)
2. [13, FROM ELECTROSTATICS TO OPTICS] (Un ouvrage remarquable, mais un peu difficile. A déconseiller en première lecture)
3. [14, ELECTROMAGNETIC WAVE THEORY] (Niveau maîtrise et au-delà)
4. [15, THE THEORY OF ELECTROMAGNETISM] (Se situe dans la même lignée que le JACKSON [12])

À propos de notations

Un cours de Physique de Licence fait apparaître un certain nombre de notations qui sont plus ou moins explicites. Nous entendons par notation (parfaitement) explicite, une notation qui qualifie une grandeur mathématique sans aucune ambiguïté. Ainsi, dans la phrase «*Soit f une fonction de $L^2_{\#}([0, T])$. . .*», la fonction f et la notation qui va de pair est-elle parfaitement explicite. En revanche, il arrive souvent, en Physique, que l'on emploie des notations implicites. Ainsi lorsque l'on dit «*On considère un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. . .*», il faut comprendre que \mathbf{E} est un champ de vecteurs réels dépendant des trois coordonnées d'espace et d'une coordonnée de temps². D'une manière générale, on notera les vecteurs réels et dépendant du temps par des lettres en gras et en style roman droit (ex. \mathbf{E} , \mathbf{B} , etc. . .)³ et les scalaires en lettres «normales» latines ou grecques (ex. E_0 , k_x , α , etc. . .). Les lettres grasses et calligraphiées sont, en général, dévolues aux amplitudes complexes associées aux vecteurs réels et dépendant du temps (ex. \mathcal{E} , \mathcal{B} , etc. . .). Enfin, avant de laisser le lecteur avide poursuivre son chemin, signalons que certains passages peuvent être négligés en première lecture. Ces passages sont signalés par une police de caractères légèrement plus petite et par un liseré gris dans la marge comme indiqué ci-contre.

2. Ceci est, en général insuffisant pour caractériser le champ en question. En d'autres termes, la plupart du temps, cette information est insuffisante pour pouvoir assurer que le problème mathématique sous-jacent au problème physique posé admette une réponse et une seule. Le Physicien a alors recours au subterfuge qui consiste à dire que parmi toutes les solutions, il n'y en a qu'une de physiquement acceptable !

3. On rajoutera un «chapeau» aux vecteurs dit normés (de norme unité) (Ex. $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{n}}$, etc. . .)

Première partie

Outils mathématiques

1

Séries de Fourier

Sommaire

1.1	Préambule	5
1.2	Polynômes trigonométriques	6
1.2.1	Fonction périodique	6
1.2.2	Fonction exponentielle complexe	6
1.2.3	Fonction trigonométrique	7
1.2.4	Représentation en Sinus et Cosinus	7
1.2.5	Propriété d'orthogonalité	8
1.2.6	Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques	9
1.2.7	Égalité de Parseval	9
1.3	Séries de Fourier	10
1.3.1	Le cadre de l'espace $L^p_{\sharp}([0, T])$	10
1.3.2	Théorème fondamental	10
1.3.3	Approximation dans $L^2_{\sharp}([0, T])$	10
1.3.4	Théorème de Dirichlet	11
1.3.5	Quelques exemples de séries de Fourier	12
1.3.6	Analyse spectrale – Coefficients de Fourier	12
1.4	Un exemple d'utilisation	13
1.4.1	La corde vibrante fixée entre deux points : généralités	13
1.4.2	Cas de la corde pincée	14
1.4.3	Cas de la corde frappée	15
1.4.4	Comparaison entre les cordes pincées et les cordes frappées	16

1.1 Préambule

La Nature n'est pas avare d'exemples et en donnant son spectacle quotidien à nos ancêtres, Elle a su leur montrer que, derrière la richesse inouïe de ses apparats, il se cachait quelques lois simples. Il faut ici entendre le mot «loi» sous la forme approximative et archaïque suivante : ranger ensemble des phénomènes naturels non identiques que l'on peut relier par un critère quelconque. Il est probable que parmi ces premiers «rangements» l'Homme a su assez tôt dans son Histoire faire la

distinction entre les événements qui se répétaient de manière régulière (ou qui lui apparaissaient comme se répétant de manière régulière) et les autres. Ces phénomènes périodiques furent à l'origine des succès de l'Astronomie et de ce qui allait être la Physique et ils ont permis, entre autres, de faire des mesures de plus en plus précises du temps. Que l'on songe au gain en précision lorsque l'on est passé des horloges ne mettant pas en jeu des phénomènes périodiques comme la clepsydre ou plus simplement encore la bougie (très en vogue au Moyen Âge dans les églises et les abbayes) à des horloges à balancier. Ces vieilles horloges qui hantent encore les salons de nos grands-parents prêtent à sourire et il semble qu'elles ne puissent pas soutenir la comparaison avec les montres modernes qui, pour certaines d'entre elles sont reliées à un satellite et qui ont une dérive inférieure à une seconde par siècle! Cependant ces balanciers sont à l'origine d'une découverte qui met en lumière les rapports intimes qu'il peut y avoir entre théorie et expérience. Par le truchement de l'esprit, prenons place sur un banc à la fin du XVI^e siècle, à Pise, à côté du jeune Galilée et observons en sa prestigieuse compagnie le mouvement d'un pendule. Le lecteur sait sans doute que, pourvu que l'on néglige les frottements, le balancier a une fréquence propre, c'est-à-dire qu'il oscille avec une fréquence indépendante de la façon dont on a initié le mouvement (conditions initiales) et qui, en l'occurrence, dépend de la longueur dudit pendule et de l'accélération de la pesanteur. Tout cela était évidemment inconnu à l'époque mais notre jeune et fougueux italien avait le pressentiment que le balancier effectuait un mouvement périodique. Mettre à l'épreuve sa théorie serait, aujourd'hui, un jeu d'enfant : il suffit de disposer d'une montre. Mais à l'époque Galilée ne disposait ni de montre ni d'horloge à balancier. Il dut donc se résoudre à observer le mouvement du balancier et mesurer la période en la comparant avec son rythme cardiaque. On frémit à l'idée que Galilée pût être atteint par des accès soudains de tachycardie ou bradycardie et l'on peut raisonnablement penser que la «foi» qu'il avait en sa théorie l'emportait sur tout autre considération fût elle expérimentale. Quoi qu'il en soit, ce que Galilée cherchait à mesurer est devenu en quelques décennies une mesure du temps. Et les horloges à balancier détrônèrent alors les horloges solaires, clepsydres et autres instruments de mesure du temps.

Le lecteur, maintenant persuadé de l'importance des phénomènes périodiques a probablement maintenant hâte de rentrer dans le vif du sujet et de se livrer à son exercice favori : la manipulation d'objets mathématiques.

1.2 Polynômes trigonométriques

1.2.1 Fonction périodique

Une fonction f est dite périodique de période T (ou T -périodique) si et seulement si :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad : f(t+T) = f(t) \quad (1.1)$$

Remarque 1.2.1 Si T est une période de la fonction f , les quantités $2T, \dots, NT$ sont aussi des périodes : par conséquent, il existe une infinité de périodes. En général, ce que l'on appelle **la période**, (appelée par la suite T) est le plus petit élément non nul (s'il existe!) de l'ensemble **des périodes**.

1.2.2 Fonction exponentielle complexe

La fonction $\varphi_n(t) = \exp\left(\frac{2i\pi nt}{T}\right)^1$ étant de période T , il en est de même pour toute combinaison linéaire des $\varphi_n(t)$:

1. Nous verrons un peu plus loin le statut particulier de la fonction exponentielle complexe.

$$p(t) = \sum_{n \in I} c_n \varphi_n(t), \text{ avec } \text{card}(I) < +\infty \text{ et } c_n \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

L'ensemble I étant fini, on peut supposer que $p(t)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n(t). \quad (1.3)$$

1.2.3 Fonction trigonométrique

La fonction $p_N(t)$ définie en (1.3) est alors appelée polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N . Et nous noterons, par la suite, \mathcal{T}_N^T l'ensemble de ces polynômes.

Il arrive assez souvent, dans la pratique, que ces polynômes soient réels. Dans ce cas, on a :

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n(t) \quad (1.4)$$

soit

$$p_N^*(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n^* \varphi_n^*(t) \quad (1.5)$$

or $\varphi_n^* = \varphi_{-n}$, d'où :

$$p_N^* = \sum_{n=-N}^N c_n^* \varphi_{-n}(t) = \sum_{n'=-N}^{+N} c_{-n'}^* \varphi_{n'}(t) \quad (1.6)$$

Comme on a $p_N = p_N^*$ pour tout t , on obtient l'égalité² :

$$c_n^* = c_{-n} \quad (1.7)$$

pour tout n dans $[-N, +N]$. Cette dernière égalité qui traduit la symétrie hermitienne des coefficients du polynôme trigonométrique montre que si l'on connaît les coefficients à indice positif, on peut déduire le polynôme trigonométrique.

1.2.4 Représentation en Sinus et Cosinus

L'égalité (1.3) peut s'exprimer en fonction des fonctions sinus et cosinus :

2. Ce résultat sous-entend que l'on a l'implication suivante :

$$p_N(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies c_n = 0, \quad \forall n \in [-N, N]$$

Nous verrons un peu plus loin que c'est bien le cas.

$$\begin{aligned}
p_N(t) &= \sum_{n=-N}^{+N} c_n \left(\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{+N} c_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=-N}^{-1} c_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\
&\quad + i \sum_{n=1}^{+N} c_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + i \sum_{n=-N}^{-1} c_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{+N} (c_n + c_{-n}) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{+N} i(c_n - c_{-n}) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$p_N(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+N} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{+N} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (1.8)$$

avec pour tout n dans $[0, N]$

$$\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n} \\
b_n &= i(c_n - c_{-n})
\end{aligned}$$

Et inversement :

$$\begin{aligned}
c_n &= (a_n - ib_n)/2 \\
c_{-n} &= (a_n + ib_n)/2
\end{aligned}$$

Si de plus le polynôme $p_N(t)$ est une fonction réelle l'égalité (1.7) conduit à :

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\Re\{c_n\} \\
b_n &= -2\Im\{c_n\}
\end{aligned}$$

pour tout n dans $[0, N]$.

1.2.5 Propriété d'orthogonalité

Un calcul simple montre que l'on a la propriété suivante :

$$\int_0^T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \delta_{m,n} T. \quad (1.9)$$

Cette propriété fondamentale nous conduit à munir l'espace des polynômes trigonométriques de période T et de degré inférieur à N , \mathcal{T}_N^T du produit scalaire suivant :

$$\langle p, q \rangle = \int_0^T p q^* dt. \quad (1.10)$$

1.2.6 Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques

L'égalité (1.9) qui traduit l'orthogonalité des fonctions φ_n au sens du produit scalaire défini plus haut (1.10), nous permet d'établir très simplement des propriétés fondamentales :

$$\langle p_N, \varphi_m \rangle = \left\langle \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n, \varphi_m \right\rangle = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \sum_{n=-N}^{+N} c_n T \delta_{n,m} = c_m T \quad (1.11)$$

d'où :

$$c_m = \frac{1}{T} \langle p_N, \varphi_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_N e^{-\frac{2i\pi mt}{T}} dt, \quad \forall m \in [-N, N]. \quad (1.12)$$

Remarque 1.2.2 Si $p_N(t) = 0$ pour tout t , l'égalité écrite ci-dessus conduit à $c_m = 0, \quad \forall m \in [-N, N]$.

Avec les coefficients a_m et b_m , on obtiendrait :

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T p_N \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T p_N \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \quad \forall m \in [0, N]. \quad (1.13)$$

On a ainsi résolu le problème d'**Analyse Spectrale**³ d'une fonction trigonométrique : connaissant la fonction p_N , calculer les coefficients c_m de son développement en exponentielles complexes.

1.2.7 Égalité de Parseval

Enfin la propriété d'orthogonalité conduit à un autre résultat très important concernant le produit scalaire de deux polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned} \langle p_N, q_N \rangle &= \left\langle \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n, \sum_{m=-N}^{+N} d_m \varphi_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-N}^{+N} c_n d_m^* \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-N}^{+N} c_n d_m^* T \delta_{n,m} \\ &= T \sum_{n=-N}^{+N} c_n d_n^* \end{aligned}$$

Ce résultat est connu sous le nom d'**égalité de Parseval**. Un cas particulièrement intéressant s'obtient pour $p_N = q_N$:

$$\sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \|p_N\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |p_N|^2 dt. \quad (1.14)$$

3. Nous verrons un peu plus loin une justification de ce vocabulaire curieux

1.3 Séries de Fourier

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de généraliser les résultats obtenus dans le paragraphe précédent à une classe de fonctions périodiques beaucoup plus vaste que l'espace des polynômes trigonométriques. La question fondamentale est alors :

toute fonction T -périodique ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) peut-elle se décomposer en une somme de Fourier i.e. $\forall t \in [0, T]$ $f(t) = \sum_{n \in I} f_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$?

La réponse est bien évidemment négative si l'ensemble I est un ensemble fini (somme finie). Il suffit pour cela de constater que lorsque I est un ensemble fini, le terme de droite est indéfiniment dérivable et que le terme de gauche n'a *a priori* aucune raison de l'être. Dans un mémoire en 1807, Joseph Fourier affirma que la réponse devait être positive pourvu que la somme \sum soit en fait une série c'est-à-dire pour laquelle $I = \mathbb{Z}$.

1.3.1 Le cadre de l'espace $L^p_{\#}([0, T])$

$$L^p_{\#}([0, T]) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ est } T\text{-périodique} / \int_0^T |f(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

1.3.2 Théorème fondamental

On admettra le théorème fondamental suivant :

Si f est une fonction de $L^2_{\#}([0, T])$ et soit $f_N = \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$ avec $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} dt$, alors $\int_0^T |f - f_N|^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0^4$.

1.3.3 Approximation dans $L^2_{\#}([0, T])$.

Soit f une fonction de $L^2_{\#}([0, T])$ et soit p_N un élément de \mathcal{T}_N^T , on peut alors écrire $p_N = \sum_{n=-N}^{+N} x_n \varphi_n$. Nous allons chercher à approximer une fonction périodique quelconque (il faut qu'elle soit quand même dans $L^2_{\#}([0, T])$!) par un polynôme de degré N . En d'autres termes, on se demande si l'on peut trouver les coefficients $\{x_n\}$ telles que le reste $r_N = f - p_N$ soit le plus petit possible au sens de $L^2_{\#}([0, T])$ i.e. telles que $\|r_N\|_{L^2_{\#}([0, T])}^2$ soit le plus petit possible ?

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \|r_N\|^2 &= \langle f - p_N, f - p_N \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|p_N\|^2 - \langle f, p_N \rangle - \langle p_N, f \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|p_N\|^2 - 2\Re \{ \langle f, p_N \rangle \} \end{aligned}$$

Or $\|p_N\|^2 = T \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2$ et $\langle f, p_N \rangle = \left\langle f, \sum_{n=-N}^{+N} x_n \varphi_n \right\rangle = \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* \langle f, \varphi_n \rangle$ avec $\langle f, \varphi_n^* \rangle = \int_0^T f \varphi_n dt = T c_n(f)$. On a donc :

4. On note parfois : $\|f_N - f\|_{L^2_{\#}([0, T])} \rightarrow 0$ ou même $f_N \xrightarrow{L^2_{\#}([0, T])} f$ (lire f_N converge vers f au sens de $L^2_{\#}([0, T])$)

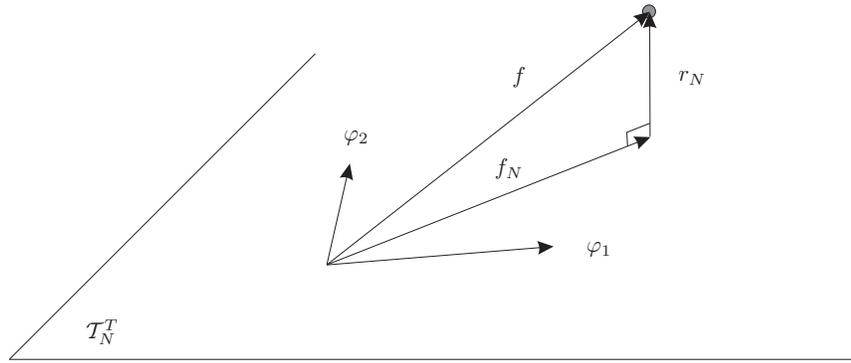


FIGURE 1.1 – Interprétation géométrique

$$\begin{aligned}
 \|r_N\|^2 &= \|f\|^2 + T \sum_{n=-N}^{n=+N} |x_n|^2 - 2\Re \{x_n^* c_n(f)\} \\
 &= \|f\|^2 + T \sum_{n=-N}^{n=+N} |x_n - c_n(f)|^2 - |c_n(f)|^2 \\
 &= \|f\|^2 - T \sum_{n=-N}^{n=+N} |c_n(f)|^2 + T \sum_{n=-N}^{n=+N} |x_n - c_n(f)|^2
 \end{aligned}$$

Pour que $\|r_N\|^2$ soit le plus petit possible, il faut donc que le dernier terme soit nul i.e. que pour tout n dans $[-N, +N]$, on ait l'égalité $x_n = c_n(f)$. Par ailleurs, on peut établir que le reste r_N est orthogonal à toute fonction φ_k (i.e. $\langle r_N, \varphi_k \rangle = 0$). On a, en effet :

$$\begin{aligned}
 \langle r_N, \varphi_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(f) \varphi_n, \varphi_k \right\rangle \\
 &= \underbrace{\langle f, \varphi_k \rangle}_{T c_k(f)} - \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(f) \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle}_{T \delta_{n,k}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

1.3.4 Théorème de Dirichlet

Il s'agit maintenant de répondre à la question suivante : *dans quelle mesure peut-on affirmer que pour un point t donné $f_N(t)$ converge (convergence ponctuelle) vers $f(t)$?* Voici l'énoncé du théorème de Dirichlet (ou théorème de la convergence ponctuelle).

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction de $L^1_{\mathbb{H}}([0, T])$, si en un point t_0 les limites $f(t_{0+})$ et $f(t_{0-})$ existent de même que $f'(t_{0+})$ et $f'(t_{0-})$ alors on a le résultat suivant :*

$$f_N(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(t_{0+}) + f(t_{0-}))$$

Corollaire 1.3.2 *En outre si f est continue alors on a la convergence ponctuelle à savoir $f_N(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(t_0)$.*

Corollaire 1.3.3 *Si f est continue partout : alors on peut écrire l'égalité : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f .*

1.3.5 Quelques exemples de séries de Fourier

Ces exemples seront abordés à l'occasion de séances de Travaux Dirigés.

1.3.6 Analyse spectrale – Coefficients de Fourier

Considérons un système physique où l'on peut définir une «fonction d'entrée» x de la variable t (le temps, par exemple) et une «fonction de sortie» y de la même variable. Nous supposons qu'il existe un opérateur A tel que l'on peut écrire :

$$y(t) = A(x(t)). \quad (1.15)$$

La «fonction d'entrée» étant donnée, la question est maintenant de savoir déterminer simplement la «fonction de sortie». Bien entendu, si l'on n'a aucune idée sur l'opérateur A , il paraît difficile, voire impossible de répondre à une telle question. Nous allons supposer que A a les trois propriétés suivantes.

1. A est un opérateur linéaire.
2. A est un opérateur continu. Autrement dit, si $X_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} X$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(X_k) = A(X). \quad (1.16)$$

(On peut inverser la limite et l'opérateur A).

3. A commute avec tout opérateur de translation dans le temps i.e. si $y(t) = A(x(t))$ alors $y(t - t_0) = A(x(t - t_0))$, pour tout t_0 élément de \mathbb{R} .

L'opérateur est dit alors **filtre linéaire et continu**. On suppose maintenant, pour simplifier que x est une fonction périodique et continue, de sorte que l'on peut écrire :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_n(t). \quad (1.17)$$

En vertu des propriétés 1 et 2, on peut alors écrire :

$$y(t) = A\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_n(t)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n y_n(t), \quad (1.18)$$

avec $y_n(t) = A(\varphi_n(t))$. La propriété 3 et cette dernière égalité nous conduisent alors à :

$$y_n(t + u) = A(\varphi_n(t + u)). \quad (1.19)$$

Cette dernière égalité serait sans intérêt si l'on ne tenait pas compte du statut privilégié –un de plus– de la fonction exponentielle complexe. En effet, on a :

$$\varphi_n(t + u) = \varphi_n(u) \varphi_n(t), \quad (1.20)$$

qui nous conduit à

$$y_n(t + u) = \varphi_n(u) A(\varphi_n(t)), \quad (1.21)$$

égalité qui pour, $t = 0$, s'écrit comme suit

$$y_n(u) = \lambda_n \varphi_n(u), \quad (1.22)$$

avec $\lambda_n = A(\varphi_n(0))$. En définitive, on obtient :

$$A(\varphi_n(u)) = \lambda_n \varphi_n(u) \quad (1.23)$$

La fonction φ_n apparaît alors comme une fonction propre de l'opérateur A associée à la valeur propre λ_n . On dit alors que $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue le **spectre ponctuel** de l'opérateur A , ce qui justifie *a posteriori* le terme d'Analyse spectrale. Une fois que l'on a calculé les coefficients $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ le problème est alors entièrement résolu puisque l'on a :

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \lambda_n \varphi_n(t). \quad (1.24)$$

1.4 Un exemple d'utilisation des séries de Fourier : la corde vibrante

1.4.1 La corde vibrante fixée entre deux points : généralités

Une corde de longueur L et de masse linéique λ est tendue entre deux points A et B avec une tension supposée constante T tout le long de ladite corde. On se propose d'étudier les petites oscillations de cette corde à partir de deux types de conditions initiales –type corde pincée (guitare, clavecin, ...) et type corde frappée (piano, ...)– que l'on précisera ultérieurement. La forme de la corde est entièrement déterminée par la fonction Ψ des deux variables z et t (cf. figure (1.2)). Cette fonction est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.25)$$

avec $c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$ et doit vérifier les deux conditions aux limites $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$.

L'énoncé de ce problème est encore incomplet : il nous faut encore donner la forme ainsi que la vitesse de la corde en tout point, à un instant donné. Sans perte de généralité, nous pouvons nous donner ces conditions initiales à l'instant $t = 0$. Nous exprimons mathématiquement ces deux conditions en se donnant *a priori* deux fonctions f et g telles que :

$$\Psi(z, 0) = f(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(z, 0) = g(z). \quad (1.26)$$

Nous pouvons maintenant nous atteler à la tâche. Pour cela, nous allons considérer que Ψ est la restriction sur l'intervalle $[0, L]$ d'une fonction $\tilde{\Psi}$ définie sur \mathbb{R} . Cette fonction $\tilde{\Psi}$ est périodique en z , de période $2L$ et impaire, de sorte que l'on peut écrire :

$$\tilde{\Psi} = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p(t) \sin(K_p z), \quad (1.27)$$

avec $K_p \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p\pi}{L}$. La fonction $\tilde{\Psi}$, comme Ψ , étant solution de l'équation des ondes, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left(-K_p^2 \Phi_p(t) - \frac{1}{c^2} \Phi_p''(t) \right) \sin(K_p z) = 0, \quad (1.28)$$

si l'on a supposé au préalable que l'on a le droit d'intervertir les dérivées partielles et les sommes infinies. Cela signifie, que pour toute valeur de p , on a l'égalité :

$$-K_p^2 \Phi_p(t) - \frac{1}{c^2} \Phi_p''(t) = 0 \quad (1.29)$$

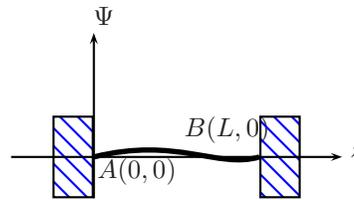


FIGURE 1.2 – Corde vibrante : flash à l'instant t .

i.e. en posant $\omega_p \stackrel{\text{déf}}{=} cK_p$, $\Phi_p''(t) + \omega_p^2 \Phi_p(t) = 0$. Cette dernière équation différentielle a une solution bien connue qui est

$$\Phi_p(t) = A_p \cos(\omega_p t) + B_p \sin(\omega_p t). \quad (1.30)$$

En remplaçant dans l'égalité (1.27) la fonction Φ_p par cette expression, on trouve l'égalité :

$$\tilde{\Psi} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(A_p \cos(\omega_p t) + B_p \sin(\omega_p t) \right) \sin(K_p z). \quad (1.31)$$

Remarque 1.4.1 *L'idée de la méthode consiste à remplacer l'étude de la fonction Ψ , solution d'une équation différentielle avec des «conditions aux bords», par l'étude d'une fonction périodique ayant une «certaine régularité», solution de la même équation différentielle.*

Remarque 1.4.2 *Par la suite, on ne distinguera plus toujours la fonction définie sur tout \mathbb{R} , $\tilde{\Psi}$, et sa restriction Ψ .*

Il nous reste maintenant à déterminer les constantes $\{A_p\}_{p=1,+\infty}$ et $\{B_p\}_{p=1,+\infty}$ en fonction de f et g . Pour cela il suffit de considérer la fonction \tilde{f} (resp. \tilde{g}) qui est impaire et $2L$ -périodique et dont la restriction à $[0, L]$ est f (resp. g). On a alors :

$$\tilde{f} = \sum_{p=1}^{+\infty} f_p \sin(K_p z) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \sum_{p=1}^{+\infty} g_p \sin(K_p z). \quad (1.32)$$

Il suffit alors d'égaliser d'une part $\tilde{\Psi}(z, 0)$ et \tilde{f} et d'autre part $\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}(z, 0)$ et \tilde{g} , soit :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} A_p \sin(K_p z) = \sum_{p=1}^{+\infty} f_p \sin(K_p z) \quad (1.33)$$

et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} B_p \omega_p \sin(K_p z) = \sum_{p=1}^{+\infty} g_p \sin(K_p z) \quad (1.34)$$

ce qui conduit immédiatement à

$$A_p = f_p \quad \text{et} \quad B_p = \frac{g_p}{\omega_p}. \quad (1.35)$$

On a donc en définitive :

$$\Psi(z, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(f_p \cos(\omega_p t) + \frac{g_p}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right) \sin(K_p z). \quad (1.36)$$

1.4.2 Cas de la corde pincée

On suppose qu'à l'instant initial la corde a l'allure donnée à la figure (1.3). La fonction f introduite au paragraphe précédent est alors donnée par ⁵ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{\alpha L} & , \text{ si } 0 < x < \alpha L \\ \frac{h(x-L)}{(\alpha-1)L} & , \text{ si } \alpha L < x < L \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.37)$$

5. On notera que la fonction f est bien continue.

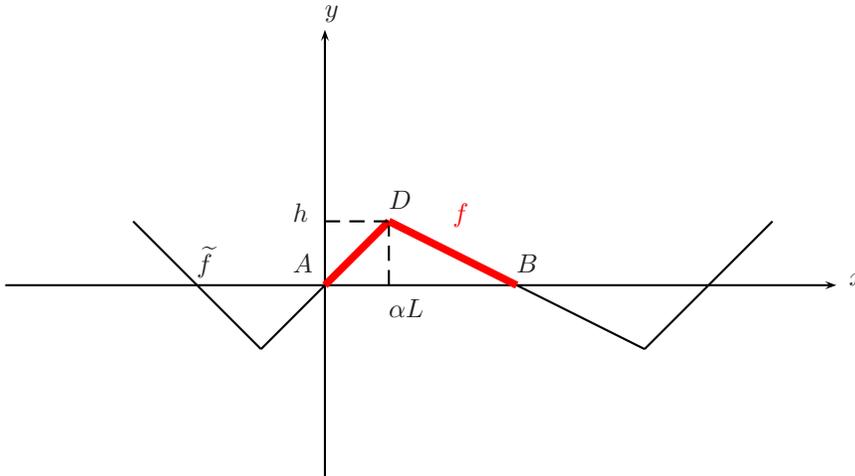


FIGURE 1.3 – Graphe des fonctions f et \tilde{f} ($0 < \alpha < 1$).

où α est un paramètre tel que $0 < \alpha < 1$. Par ailleurs, on définit sa «périodisée» \tilde{f} comme suit⁶ :

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - 2kl) - f(-x + 2kl). \quad (1.38)$$

Enfin, on considère qu'à l'instant $t = 0$ la corde est sans vitesse initiale de sorte que $\tilde{g} = 0$. Le lecteur montrera à titre d'exercice que :

$$f_p = C_\alpha \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2}, \text{ avec } C_\alpha = \frac{2h}{\pi^2\alpha(1-\alpha)} \text{ et } g_p = 0. \quad (1.39)$$

ce qui nous conduit à :

$$\Psi(z, t) = C_\alpha \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2} \cos(\omega_p t) \sin(K_p z). \quad (1.40)$$

1.4.3 Cas de la corde frappée

Dans ce cas là, on suppose que la corde, à l'instant $t = 0$ a l'allure de la corde au repos cependant que la vitesse de la corde au même instant est décrite par la fonction g représentée à la figure (1.4). De la même façon que précédemment on construit la «périodisée» de g de la manière suivante :

$$\tilde{g} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(x - 2kl) - g(-x + 2kl) \quad (1.41)$$

Dans ce cas, le lecteur doit trouver :

$$g_p = \frac{C'}{p} \sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right) \sin(p\pi\alpha), \quad (1.42)$$

⁶. Le lecteur vérifiera sans peine que cette fonction ainsi définie est bien impaire et $2L$ -périodique et que f est bien la restriction de cette fonction à $[0, L]$

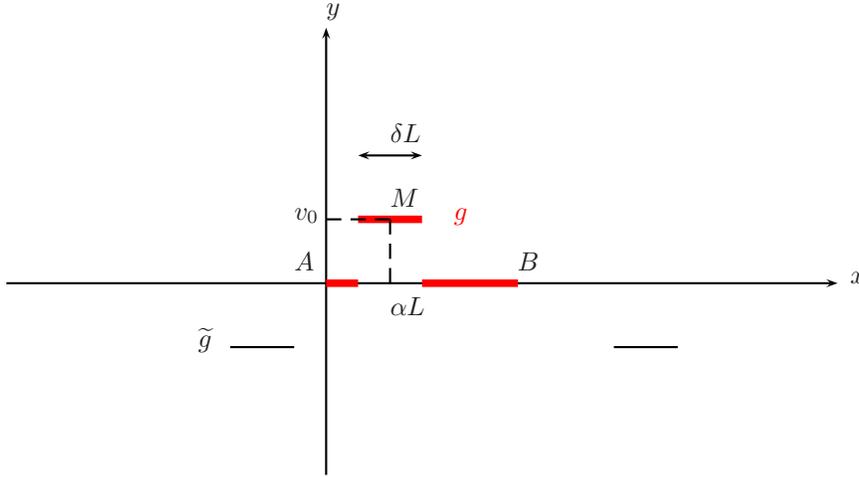


FIGURE 1.4 – Graphe des fonctions g et \tilde{g} ($0 < \alpha < 1$, $0 < \delta < \min(2\alpha, 2(1 - \alpha))$).

avec $C' = \frac{4v_0}{\pi}$, ce qui nous conduit à :

$$\Psi(z, t) = C' \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right) \sin(p\pi\alpha)}{p\omega_p} \sin(\omega_p t) \sin(K_p z). \quad (1.43)$$

Or, on a l'égalité $\omega_p = K_p c = \frac{p\pi c}{L}$ qui donne immédiatement :

$$\Psi(z, t) = \frac{C' L}{c\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right) \sin(p\pi\alpha)}{p^2} \sin(\omega_p t) \sin(K_p z). \quad (1.44)$$

1.4.4 Comparaison entre les cordes pincées et les cordes frappées

Imaginons un instant que dans les deux cas nous ayons affaire à la même corde de sorte que les pulsations temporelles $\{\omega_p\}_{p=1,+\infty}$ et les pulsations spatiales $\{K_p\}_{p=1,+\infty}$ soient les mêmes dans les deux cas. On a alors avec des notations qui parlent d'elles-mêmes :

$$\Psi^P = \sum_{p=1}^{+\infty} \Psi_p^P = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(K_p z) \cos(\omega_p t) \quad \text{avec} \quad a_p = C_\alpha \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2} \quad (1.45)$$

et

$$\Psi^F = \sum_{p=1}^{+\infty} \Psi_p^F = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(K_p z) \sin(\omega_p t) \quad \text{avec} \quad b_p = \frac{C' L}{c\pi} \frac{\sin(p\pi\alpha) \sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right)}{p^2}. \quad (1.46)$$

Il faut donc interpréter ces résultats de la manière suivante. Si l'on admet que les cordes étudiées sont dans l'air, milieu capable de véhiculer le son, alors le son émis par ces cordes peut être décomposé en sons purs de fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$. Une corde peut donc être assimilée à une infinité de diapasons de fréquences f_p multiples de la fréquence f_1 qui est appelée **fréquence fondamentale**. Il s'agit maintenant d'étudier l'amplitude associée à chacun de ces diapasons, amplitude donnée par a_p

pour la corde pincée (resp. b_p pour la corde frappée). On va supposer maintenant qu'on n'entende que les huit premières harmoniques : f_1 jusqu'à $8f_1$ (nous verrons plus loin que c'est licite). Nous avons alors le tableau suivant :

f_1	$2f_1$	$3f_1$	$4f_1$	$5f_1$	$6f_1$	$7f_1$	$8f_1$
f_1	$2f_1$	f_2	$4f_1$	f_3	$2f_2$	f_4	$8f_1$

Il apparaît alors quatre fréquences f_1 , f_2 , f_3 et f_4 (appelées notes en Musique) différentes ainsi que ces mêmes notes une ou plusieurs octaves au-dessus ($2f_1, 4f_1, 8f_1$) et ($2f_2$). Or les fréquences f_2 et f_3 correspondent en réalité respectivement à la quinte et à la tierce. Si donc on veut éliminer la fréquence f_4 qui «frotte» au moins pour nos oreilles d'occidentaux (cette note correspond au $S_{i_{b3}}$), il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{7}$ de sorte que l'on annule les termes $a_7, a'_7, a_{14}, a'_{14}$, etc ... Par ailleurs, si l'on choisit δ petit – que l'on songe à la taille du marteau d'un piano par rapport à celle de la corde – alors pour les harmoniques basses (p petit) on a $p\delta$ petit, ce qui nous permet d'écrire :

$$b_p \simeq \frac{C'L\delta}{2c} \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p} \quad (1.47)$$

et

$$a_p = C_\alpha \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2} \quad (1.48)$$

On constate alors que, pour les harmoniques audibles (harmoniques basses), on a une décroissance plus rapide de l'amplitude de ces harmoniques pour les cordes pincées que pour les cordes frappées. À titre d'exemple, on donne le tableau suivant avec $\alpha = \frac{1}{7}$ et $\delta = \frac{1}{20}$.

p	1	2	3	4	5	6	7	8
a_p/a_1	1.000	0.4505	0.2497	0.1404	0.0721	0.0278	0.000	-0.0156
b_p/b_1	1.000	0.8992	0.7428	0.5531	0.3516	0.1607	0.000	-0.1171

Conclusion 1.4.3 *Si l'on s'intéresse à la gamme dite juste (gamme du physicien) et si l'on prend comme fréquence fondamentale $f_1 = 256$ Hz (correspondant à $p = 1$ dans le développement en série de Fourier), on a alors l'émission de la note Do (appelé Do_3). Dans cette gamme, les fréquences $2f_1, 3f_1, 4f_1, 5f_1$ et $6f_1$ correspondent alors respectivement au Do_4, Sol_4, Do_5, Mi_5 et Sol_6 . D'autre part, si l'on accepte (ce qui est un modèle simpliste) que l'oreille soit un récepteur quadratique, le mélomane «entendra» une superposition de sons purs avec une énergie proportionnelle au carré des coefficients de Fourier. Enfin, si l'on considère que l'on peut distinguer un son (au milieu d'autres sons) si son énergie est supérieure à 5% du son correspondant au son le plus énergétique (généralement, correspondant à la note fondamentale), on constate que l'on n'entend que le Do_3 , le Do_4 et le Sol_4 (octave et une quinte) dans le cas de la corde pincée, alors que l'on entend le Do_3, Do_4, Sol_4, Do_5 et Mi_5 (qui fait apparaître l'accord de Do majeur – une tierce et une quinte justes) dans le cas de la corde frappée.*

On peut ainsi peut-être expliquer pourquoi à la fin du XVIII^e siècle le piano, alors appelé piano forte a progressivement détrôné le clavecin ...

Remarque 1.4.4 *On pourrait, à juste titre, émettre quelques réserves concernant les conclusions tirées plus haut. Le mélomane averti ne peut pas croire que le son émis par une guitare, une mandoline ou une harpe soit si pauvre que l'on n'entende que trois sons purs. La réalité est évidemment plus subtile car nous avons omis soigneusement de parler de la caisse de résonance, caisse sans laquelle on n'entendrait*

qu'un son effectivement extrêmement pauvre et faible. Il s'avère que le son émis par la corde excite les très nombreuses fréquences propres de la caisse de résonance. Il faut de nouveau considérer la caisse de résonance de la guitare, par exemple, comme une assemblée de diapasons pouvant avoir des fréquences propres très voisines. Ainsi, si un guitariste gratte la corde de Sol_4 (note fondamentale inaudible en pratique), il excitera les fréquences de résonance de la caisse préférentiellement autour du Sol_4 (notes audibles). Ces fréquences de la caisse déterminent le timbre de l'instrument et enrichit le son extrêmement pauvre de la corde seule. Toutefois, ces réserves étant émises, il reste que la conclusion tirée plus haut demeure.

2

Transformation de Fourier des fonctions sommables

Sommaire

2.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$	20
2.2	Définition de la transformée de Fourier d'une fonction sommable	20
2.3	Transformée de Fourier inverse	20
2.4	Exemples de transformée de Fourier	21
2.4.1	Transformée de Fourier la fonction porte Π	21
2.4.2	Transformée de Fourier de la fonction gaussienne	21
2.4.3	Transformée de Fourier de la fonction $\exp(- x)$	22
2.5	Quelques propriétés des transformées de Fourier	22
2.5.1	Linéarité de la Transformée de Fourier	22
2.5.2	Transformée de Fourier des fonctions réelles	22
2.5.3	Changement d'échelle	22
2.5.4	Parité	23
2.5.5	Translation	23
2.5.6	Modulation	23
2.5.7	Dérivation	23
2.5.8	Théorème de Parseval-Plancherel	24
2.6	Transformation de Fourier bidimensionnelle	24
2.6.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$	24
2.6.2	Définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction sommable	24
2.6.3	Transformée de Fourier d'une fonction radiale	24

Dans ce chapitre, nous allons étendre la plupart des résultats obtenus pour les séries de Fourier en remarquant qu'une fonction quelconque (pourvue de qualités décentes) est *grosso modo* une fonction périodique dont la période est infinie. Il s'agit alors très grossièrement de remplacer une somme discrète \sum par une intégrale \int .

2.1 Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , f est élément de $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} |f| dx < +\infty$. On dit alors que la fonction est *sommable*.

2.2 Définition de la transformée de Fourier d'une fonction sommable

Étant donnée une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f , notée $\mathfrak{F}^-(f)$ ou \hat{f} de la manière suivante :

$$\mathfrak{F}^-(f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (2.1)$$

Remarque 2.2.1 *Il arrive parfois que l'on rencontre d'autres définitions pour la transformée de Fourier comme :*

$$\mathfrak{F}^+(f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{+2i\pi\nu x} dx \quad (2.2)$$

Par ailleurs, la présence du coefficient 2π dans l'exposant est conventionnelle et permet d'avoir une formule de réciprocité particulièrement simple. On voit aussi, parfois, en Physique, les transformées de Fourier suivantes :

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (2.3)$$

ou bien en Physique Quantique

$$\mathfrak{F}(\Psi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx \quad (2.4)$$

Remarque 2.2.2 *L'égalité 2.1 a bien un sens puisque l'on a les inégalités suivantes :*

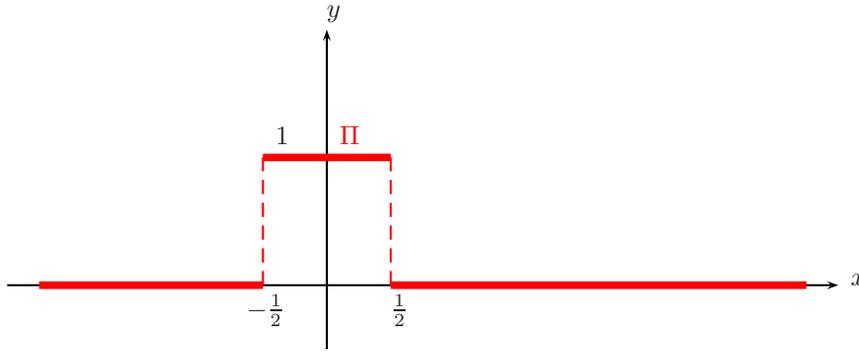
$$|\hat{f}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2i\pi\nu x}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty \quad (2.5)$$

2.3 Transformée de Fourier inverse

La question est maintenant de savoir si à partir de la connaissance de la transformée de Fourier d'une fonction (son équivalent pour les fonctions périodiques étant la connaissance de l'ensemble des coefficients de Fourier) on est capable de retrouver la fonction. La réponse est positive puisque l'on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Soit f une fonction sommable telle que \hat{f} soit aussi sommable, alors on a l'égalité $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{F}^-(f))(t) = f(t)$, en tout point où la fonction f est continue.*

Remarque 2.3.2 *Nous allons voir dans l'exemple qui suit, que, malheureusement, il se peut que f soit sommable sans que sa transformée de Fourier le soit.*

FIGURE 2.1 – La fonction porte Π .

2.4 Exemples de transformée de Fourier

2.4.1 Transformée de Fourier la fonction porte Π .

Il est d'abord clair que la fonction porte est une fonction sommable .

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (2.6)$$

Pour $\nu = 0$, on a immédiatement $\widehat{\Pi}(0) = 1$, et pour des valeurs non nulles de ν , on a $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{-1}{2i\pi\nu} [e^{-2i\pi\nu x}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$. En appelant sinc la fonction définie par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, pour tout x non nul et prolongée par continuité en zéro, on obtient :

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu) \quad (2.7)$$

On peut, par ailleurs montrer que la fonction sinc n'est pas sommable.

2.4.2 Transformée de Fourier de la fonction gaussienne

Il est aisé de montrer que cette fonction est bien sommable (on peut par exemple partir de l'inéquation $\exp(-x^2) < \exp(-|x|)$, pour tout x n'étant pas dans l'intervalle $[-1, 1]$). On a alors, en posant $g = \exp(-x^2)$:

$$\begin{aligned} \widehat{g} &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp[-[(x + i\pi\nu)^2 + \pi^2\nu^2]] dx \\ &= e^{-\pi^2\nu^2} \int_{\mathbb{R}} \exp[-(x + i\pi\nu)^2] dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

En faisant le changement de variable $z = x + i\pi\nu$, on est amené à considérer une intégrale dans le plan complexe :

$$\widehat{g} = e^{-\pi^2\nu^2} \int_{\mathbb{R} + i\pi\nu} e^{-z^2} dz \quad (2.9)$$

On admettra que la fonction e^{-z^2} de la variable complexe z étant holomorphe, l'intégrale dans le plan complexe $\int_{\mathbb{R} + i\pi\nu} e^{-z^2} dz$ est égale à l'intégrale "ordinaire" $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ (on a, en quelque sorte, négligé $i\pi\nu$ devant l'infini). Enfin, on peut montrer (cf. T.D, par exemple) que : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. On a alors l'égalité :

$$\widehat{g} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\nu^2} \quad (2.10)$$

Remarque 2.4.1 La transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne.

2.4.3 Transformée de Fourier de la fonction $\exp(-|x|)$

Soit h la fonction $h = \exp(-|x|)$. Des calculs élémentaires (cf. T.D. par exemple) conduisent à :

$$\widehat{h} = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2} \quad (2.11)$$

2.5 Quelques propriétés des transformées de Fourier

2.5.1 Linéarité de la Transformée de Fourier

Soit f et g deux fonctions complexes et sommables et soit λ et μ deux complexes quelconques, on a alors :

$$\mathfrak{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathfrak{F}(f) + \mu \mathfrak{F}(g) \quad (2.12)$$

2.5.2 Transformée de Fourier des fonctions réelles

Soit f une *fonction réelle*, il est alors immédiat de constater que $\widehat{f}(-\nu) = \widehat{f}^*(\nu)$. Cette propriété appelée souvent *symétrie hermitienne* sera souvent utilisée en Physique : elle signifie que si l'on connaît uniquement la transformée de Fourier de f pour les valeurs positives de ν (ces valeurs positives de ν s'identifiant aux *fréquences*) on peut, par conjugaison, connaître la transformée de Fourier de f pour les valeurs négatives de ν (et par conséquent connaître la transformée de Fourier de f pour toutes les valeurs de ν). Ainsi, par transformée de Fourier inverse, on peut espérer connaître la fonction f à partir uniquement de sa transformée de Fourier pour les valeurs positives de ν . Cette propriété remarquable est en général fautive pour des fonctions non réelles.

2.5.3 Changement d'échelle

Soit f une fonction sommable et a un réel non nul, on se propose d'évaluer la quantité suivante :

$$\mathfrak{F}(f(ax)) = \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (2.13)$$

On fait alors le changement de variable $u = ax$. Si a est un réel positif, on a alors :

$$\mathfrak{F}(f(ax))(\nu) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu \frac{u}{a}} du \quad (2.14)$$

Et si a est un réel négatif :

$$\mathfrak{F}(f(ax))(\nu) = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu \frac{u}{a}} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu \frac{u}{a}} du \quad (2.15)$$

En résumé, nous avons donc :

$$\mathfrak{F}(f(ax))(\nu) = \frac{1}{|a|} \mathfrak{F}(f(x))\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (2.16)$$

Cette dernière propriété a une signification physique très importante : un signal dont le support est étroit (resp. large) dans le domaine temporel est large (resp. étroit) dans le domaine des fréquences.

2.5.4 Parité

En utilisant l'égalité 2.16 avec $a = -1$, il est immédiat de constater que si la fonction f est paire (resp. impaire), sa transformée de Fourier est aussi paire (resp. impaire) : *la transformée de Fourier conserve la parité.*

2.5.5 Translation

Soit f une fonction sommable, on veut évaluer :

$$\mathfrak{F}(f(x-a))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a) e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (2.17)$$

En faisant le changement de variable $u = x - a$, on obtient :

$$\mathfrak{F}(f(x-a))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi\nu(u+a)} du = e^{-2i\pi\nu a} \mathfrak{F}(f(x))(\nu) \quad (2.18)$$

On dit alors que l'on a modulé le signal.

Une translation dans le domaine spatial équivaut à une modulation dans le domaine fréquentiel.

2.5.6 Modulation

Cette opération est en quelque sorte l'opération inverse de l'opération de translation. On a, en effet :

$$\mathfrak{F}(e^{-2i\pi\nu_0 x} f(x))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi(\nu+\nu_0)x} dx = \mathfrak{F}(f(x))(\nu + \nu_0) \quad (2.19)$$

Une modulation dans le domaine spatial équivaut à une translation dans le domaine fréquentiel.

2.5.7 Dérivation

Supposons que f et sa dérivée f' soient toutes les deux sommables, nous allons calculer la Transformée de Fourier de f' :

$$\mathfrak{F}(f') = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = [f(x) e^{-2i\pi\nu x}]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (2.20)$$

Nous allons alors admettre que si f et sa dérivée f' sont toutes les deux sommables alors nécessairement f s'annule à l'infini ($f(\pm\infty) = 0$). Dans ces conditions, on obtient :

$$\mathfrak{F}(f') = 2i\pi\nu \mathfrak{F}(f) \quad (2.21)$$

Le passage à la transformée de Fourier transforme des équations différentielles en équations algébriques.

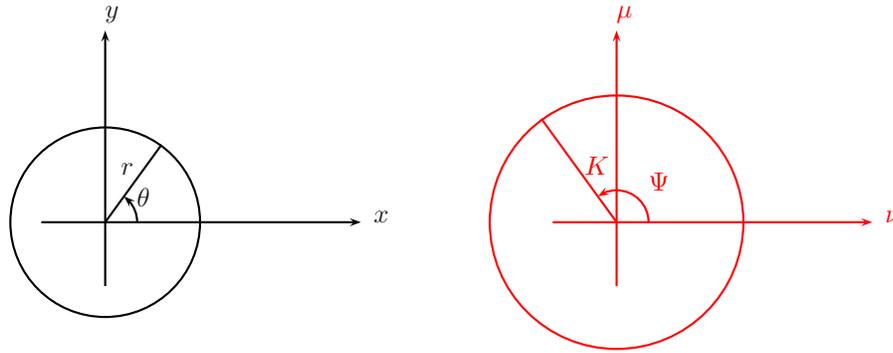


FIGURE 2.2 – Passage aux coordonnées polaires dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier.

2.5.8 Théorème de Parseval-Plancherel

Si l'on introduit le produit scalaire $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f g^* dx$, alors on admettra sans démonstration l'égalité suivante :

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (2.22)$$

qui n'est évidemment pas sans rappeler l'égalité obtenue dans le chapitre précédent concernant les fonctions périodiques.

2.6 Transformation de Fourier bidimensionnelle

2.6.1 Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} , f est élément de $L^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^2} |f| d^2x < +\infty$.

2.6.2 Définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction sommable

Étant donnée une fonction f de $L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit la transformée de Fourier de f , notée encore $\mathfrak{F}(f)$ ou \widehat{f} de la manière suivante :

$$\mathfrak{F}(f)(\nu, \mu) = \widehat{f}(\nu, \mu) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2i\pi(\nu x + \mu y)} dx dy \quad (2.23)$$

2.6.3 Transformée de Fourier d'une fonction radiale

Il arrive assez souvent que les fonctions que l'on utilise en Physique ne dépendent que de la distance à un point. La fonction f ne dépend alors explicitement que d'une seule variable que l'on note généralement r . Dans ces conditions, il existe une fonction F telle que $F(r) = f(x, y)$. Posant $\nu = K \cos \psi$ et $\mu = K \sin \psi$, la transformée de Fourier de f prend l'allure suivante :

$$\widehat{f} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+2\pi} F(r) e^{-2i\pi K r (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta)} r dr d\theta \quad (2.24)$$

Utilisant le théorème de Fubini, on arrive à :

$$\hat{f} = \int_0^{+\infty} rF(r) \left[\int_0^{+2\pi} e^{-2i\pi Kr \cos(\psi-\theta)} d\theta \right] dr \quad (2.25)$$

L'expression entre crochets est exprimable à partir de fonctions spéciales appelées *fonctions de Bessel*. Ce présent support de cours n'ayant pas vocation à insister sur ce point on pourra consulter des ouvrages plus spécialisés. Dans ces ouvrages on pourra trouver, entre autres, l'égalité suivante :

$$\int_0^{+2\pi} e^{-iu \cos \phi} d\phi = 2\pi J_0(u) \quad (2.26)$$

Prenant en compte la périodicité de la fonction cosinus, on obtient :

$$\int_0^{+2\pi} e^{-2i\pi Kr \cos(\psi-\theta)} d\theta = 2\pi J_0(2\pi Kr), \quad (2.27)$$

ce qui nous conduit à

$$\hat{f} = 2\pi \int_0^{+\infty} rJ_0(2\pi Kr)F(r) dr. \quad (2.28)$$

Cette dernière égalité est souvent appelée transformation de Hankel.

Il existe un cas particulier important notamment en Optique pour calculer l'intensité diffractée par un trou circulaire dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. Ce cas particulier correspond à :

$$F(r) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } r < R_0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.29)$$

La transformée de Fourier est alors réduite à :

$$\hat{f} = 2\pi \int_0^{R_0} rJ_0(2\pi Kr) dr. \quad (2.30)$$

Cette fois-ci encore cette intégrale est exprimable uniquement en fonction de fonctions spéciales et l'on peut voir dans les ouvrages cités plus haut l'identité suivante :

$$\int_0^x uJ_0(u) du = xJ_1(x), \quad (2.31)$$

ce qui nous conduit sans peine à :

$$\hat{f} = 2\pi R_0^2 \frac{J_1(2\pi KR_0)}{2\pi KR_0}. \quad (2.32)$$

Cette dernière expression est à rapprocher de l'expression obtenue pour la transformée de Fourier (monodimensionnelle) de la fonction porte. Avant de finir, il est important de noter que, comme dans le cas de la fonction sinus, la fonction de Bessel J_1 est nulle en zéro. Plus précisément, on a l'équivalence suivante :

$$J_1(x) \sim x/2, \quad (2.33)$$

de sorte qu'en zéro \hat{f} vaut πR_0^2 .

3

Notions sur les distributions

Sommaire

3.1	Introduction	27
3.2	Notion de distributions	30
3.2.1	Définition du support d'une fonction	30
3.2.2	L'espace \mathcal{D}	30
3.2.3	Un exemple de fonction de \mathcal{D}	31
3.2.4	Convergence dans \mathcal{D}	31
3.2.5	Les distributions de Schwartz (distributions de \mathcal{D}')	31
3.2.6	Exemples de distributions de Schwartz	31
3.3	Opérations sur les distributions	32
3.3.1	La distribution $T(\frac{x}{a})$	32
3.3.2	Dérivation d'une distribution	32
3.3.3	Un exemple fructueux d'utilisation de dérivée au sens des distributions : (la distribution $Vp(\frac{1}{x})$)	34
3.4	Produit de deux distributions	35
3.4.1	Produit de deux distributions régulières	35
3.4.2	Produit d'une distribution quelconque T par une fonction indéfiniment dérivable α	35
3.5	Suite de distributions	36
3.5.1	Définition	36

3.1 Introduction

Nous allons voir sur un exemple simple issu de la Mécanique qu'il est nécessaire d'introduire des grandeurs mathématiques qui généralisent à certains égards la notion de fonction : ces grandeurs mathématiques seront appelées les distributions. Pour ce faire, nous allons tenter de répondre à la question suivante : Calculer la force \mathbf{f} appliquée à une particule, supposée ponctuelle et de masse m , qui est animée d'une vitesse $+\mathbf{v}_0$ pour tout temps $t < 0$ et qui est animée d'une vitesse $-\mathbf{v}_0$ pour tout temps $t > 0$. Le choc a donc eu lieu à l'instant $t = 0$. D'après le principe fondamental de la dynamique, on doit avoir :

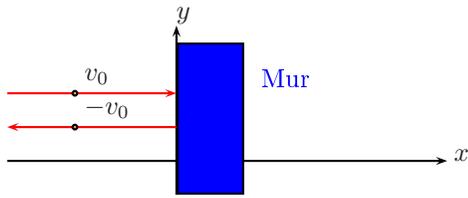


FIGURE 3.1 – Choc élastique d'une bille contre un mur.

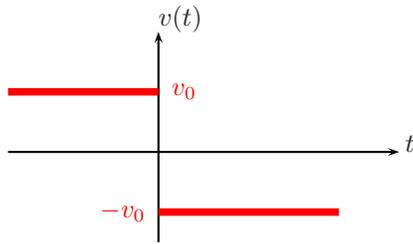


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction v .

le choc s'effectue pendant une durée ϵ , durée pendant laquelle la vitesse que l'on appellera désormais v_ϵ passera de manière linéaire de la vitesse $+v_0$ à la vitesse $-v_0$. Dans ce cas, aux points $t = \pm \frac{\epsilon}{2}$, la fonction v_ϵ est certes continue mais elle n'est manifestement pas dérivable.

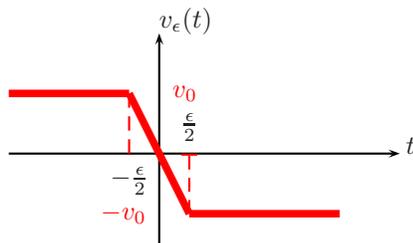


FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction v_ϵ .

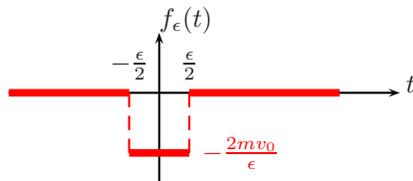


FIGURE 3.4 – Graphe de la fonction f_ϵ .

$$\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t) dt = -2mv_0 \quad (3.3)$$

et que par conséquent cette intégrale est indépendante de ϵ . On pourrait alors écrire hâtivement :

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (3.1)$$

soit en projetant sur l'axe des x

$$f = m \frac{dv}{dt} \quad (3.2)$$

On constate que la fonction v n'est pas continue à l'origine et que, par conséquent, la dérivée $\frac{dv}{dt}$ n'a pas de sens.

Par suite, la force f n'en a pas non plus. On pourrait évidemment contourner le problème en «évitant» le temps $t = 0$, on aurait alors, pour tout t différent de zéro, $\frac{dv}{dt} = 0$: il s'ensuit que $f = 0$, ce qui est une solution triviale inacceptable. La situation semble donc désespérée et le physicien en proie au doute remet alors en cause la pertinence du modèle. À juste titre, il fait remarquer que quelque bref que soit le choc, il ne peut pas être instantané : la vitesse ne peut donc pas être discontinue. Prenant en compte ces dernières remarques, nous allons considérer que

Essayons malgré tout de dériver cette fonction en évitant ces deux points gênants, à savoir $t = \pm \frac{\epsilon}{2}$. Pour $|t| > \frac{\epsilon}{2}$, $f_\epsilon = 0$ et pour $|t| < \frac{\epsilon}{2}$, $v_\epsilon = \frac{-2v_0 t}{\epsilon}$, d'où $f_\epsilon = \frac{-2mv_0}{\epsilon}$.

On a donc le graphe de f_ϵ suivant :

On voit donc que f_ϵ est une fonction qui a comme support $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$ et qui est constante sur cet intervalle, à savoir $\frac{-2mv_0}{\epsilon}$. Si maintenant l'on revient au problème initial du choc instantané, il semble opportun d'étudier le comportement de f_ϵ quand ϵ tend vers zéro. On constate que quand ϵ tend vers zéro, le support se réduit au point $\{0\}$ et que la valeur de la fonction dans ce support croît indéfiniment. Par ailleurs, il est intéressant de constater que

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = -2mv_0 \quad (3.4)$$

Mais la théorie de l'intégration nous apprend qu'une fonction nulle partout sauf en un point est d'intégrale nulle. On devrait donc avoir :

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(t) dt = 0. \quad (3.5)$$

Nous arrivons donc à une contradiction (à moins d'admettre que f_0 n'est pas une fonction !).

Faisant fi, pour l'instant, de cette contradiction, nous allons généraliser les résultats obtenus ci-avant. Pour cela, considérons une vitesse v_ϵ qui est constante en dehors de l'intervalle $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$, qui est assez régulière (par exemple dérivable) dans cet intervalle et qui est continue au bord de cet intervalle (ce qui conduit à $v_\epsilon(\pm\frac{\epsilon}{2}) = \mp v_0$). Enfin, introduisons une fonction dérivable φ . Muni de ces grandeurs mathématiques, on va s'intéresser à l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I}_\epsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t)\varphi(t) dt. \quad (3.6)$$

L'introduction de ce nouvel être mathématique peut paraître bien artificiel de prime abord. En réalité, l'introduction de cette intégrale correspond à une vision différente et en fait plus naturelle du rapport subtil qu'il y a entre grandeurs mathématiques et grandeurs physiques associées. Dans la «vision classique», on associe à une grandeur physique (ici une force) une grandeur mathématique (ici une fonction scalaire). Cette vision est d'ailleurs si bien ancrée dans nos esprits que, généralement, on confond les deux. Ainsi, a-t-on confondu la vitesse de la particule avec la fonction la représentant. Cette dernière remarque semble plus toucher l'épistémologie que la Physique mais elle sous-entend que l'on peut connaître (mesurer?) la force appliquée à la particule à tout instant. Et ce sous-entendu est inacceptable. Afin de rendre compte de cette dernière remarque, il faut se rapprocher de la réalité expérimentale et se rappeler que l'on n'a accès aux grandeurs physiques que de manière indirecte. Ainsi lorsque l'on mesure un courant, on obtient une déviation d'une aiguille nous indiquant un nombre, ou bien lorsque l'on veut regarder l'heure, on regarde sa montre pour, une fois encore constater la déviation d'une aiguille. Quoi que l'on puisse imaginer¹, la mesure d'une grandeur physique nous conduit à un nombre ou éventuellement une série de nombres : c'est bien ce que l'on se propose de faire en associant à f_ϵ un nombre $\mathcal{I}_\epsilon(\varphi)$, ce nombre dépendant de $\varphi(t)$. Cette fonction $\varphi(t)$ est là pour nous rappeler que la mesure de f_ϵ dépend des conditions dans lesquelles on a effectué ladite mesure : ainsi lorsque l'on mesure la force pendant une période ne contenant pas la durée pendant laquelle le choc a lieu sur le mur on trouve une mesure nulle.

On va maintenant s'intéresser au comportement de $\mathcal{I}_\epsilon(\varphi)$ quand ϵ tend vers zéro.

$$\mathcal{I}_\epsilon(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(t)\varphi(t) dt = m \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{dv_\epsilon}{dt} \varphi(t) dt \quad (3.7)$$

Or le théorème de la moyenne nous apprend qu'il existe un nombre c_ϵ appartenant à l'intervalle $]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}[$ tel que

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{dv_\epsilon}{dt} \varphi(t) dt = \varphi(c_\epsilon) \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{dv_\epsilon}{dt} dt \quad (3.8)$$

1. *Nous avons beau enfler nos conceptions au delà des espaces imaginables, nous n'enfantons que des atomes (nombres?) au prix de la réalité des choses. Blaise Pascal*

Il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\epsilon(\varphi) &= m\varphi(c_\epsilon) \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{dv_\epsilon}{dt} dt \\ &= m\varphi(c_\epsilon) \left[v_\epsilon\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - v_\epsilon\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \right] \\ &= m\varphi(c_\epsilon)(-v_0 - v_0) \\ &= -2mv_0\varphi(c_\epsilon)\end{aligned}$$

Il semblerait donc que :

$$\mathcal{I}_\epsilon(\varphi) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -2mv_0\varphi(0) \quad (3.9)$$

Là encore, on tombe sur la contradiction évoquée plus haut. Néanmoins, si l'on fait abstraction, un instant, de la théorie de l'intégration il semble utile d'introduire une fonction Δ^2 qui a les propriétés contradictoires suivantes :

1. $\Delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty, & \text{si } t = 0 \end{cases}$
2. Pour une fonction φ suffisamment régulière $\int_{\mathbb{R}} \Delta(t)\varphi(t) dt = \varphi(0)$. (*A fortiori*, on aura $\int_{\mathbb{R}} \Delta(t) dt = 1$)

Cette fonction est représentée sur la figure 3.5.

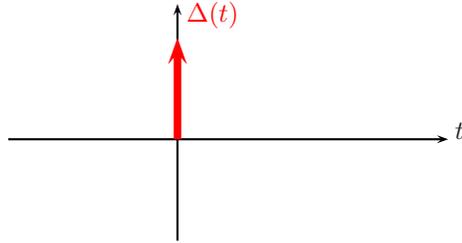


FIGURE 3.5 – Représentation graphique de la «fonction de Dirac».

(instant $t = 0$). Mais, *bis repetita placent*, le **physicien n'a accès qu'à la mesure de cette force**, et la mesure de cette force est bien finie : elle vaut $-2mv_0\varphi(0)$.

On peut donc résumer la situation en écrivant l'égalité suivante :

$$f_0 = -2mv_0\Delta \quad (3.10)$$

De nouveau, le lecteur pourrait s'insurger, en faisant remarquer qu'une force ne peut être infinie même si cette force agit pendant une durée nulle

3.2 Notion de distributions

L'objet de ce paragraphe est de mettre en place de manière rigoureuse ce qui vient d'être dit.

3.2.1 Définition du support d'une fonction

Le support d'une fonction φ noté $Supp(\varphi)$ est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la fonction φ est nulle.

3.2.2 L'espace \mathcal{D}

L'espace \mathcal{D} est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Ces fonctions sont souvent appelées **fonctions test**.

2. Cette «fonction» a été introduite dans les années vingt par P.A.M Dirac pour résoudre des problèmes de physique des particules.

3.2.3 Un exemple de fonction de \mathcal{D}

Soit χ_I la fonction caractéristique de l'ensemble I défini de la manière suivante :

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

alors la fonction $\Phi_0(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \exp(-\frac{1}{1-x^2})$ est une fonction de \mathcal{D} .

3.2.4 Convergence dans \mathcal{D}

On dit qu'une suite $\{\phi_n\}$ de fonctions de \mathcal{D} converge vers une fonction ϕ de \mathcal{D} si et seulement si :

1. $Supp(\phi_n) \subset \Omega$, avec Ω borné
2. Notant $\phi^{(p)}$ la dérivée p -ième de la fonction ϕ , on doit avoir, pour tout p entier, la suite $\{\phi_n^{(p)}\}$ qui converge uniformément vers $\phi^{(p)}$.

3.2.5 Les distributions de Schwartz (distributions de \mathcal{D}')

On appelle distribution sur \mathbb{C} (distribution de Schwartz) une forme linéaire et continue sur l'espace vectoriel \mathcal{D} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & & \mathbb{C} \\ \phi & \xrightarrow{T} & T(\phi) = \langle T, \phi \rangle \end{array} \quad (3.11)$$

Une distribution de Schwartz T est donc une application de \mathcal{D} dans \mathbb{C} qui est :

1. **linéaire** : $\langle \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \phi \rangle = \lambda_1 \langle T_1, \phi \rangle + \lambda_2 \langle T_2, \phi \rangle$
2. **continue** : $\forall \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi, \langle T, \phi_n \rangle \xrightarrow{C.S.} \langle T, \phi \rangle$

3.2.6 Exemples de distributions de Schwartz

Exemple 1 (distribution régulière)

Si f est une fonction localement sommable (f est dans $L_{loc}(\mathbb{R})$), alors la forme linéaire T_f associée à f définie comme suit :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \phi dx \quad (3.12)$$

est une distribution de Schwartz.

Remarque 3.2.1 *Les distributions qu'on peut associer à des fonctions localement sommables sont dites distributions régulières cependant que les autres sont dites distributions singulières.*

Exemple 2 (distribution de Dirac δ)

La distribution de Dirac δ est définie de la manière suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \delta(\phi) = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0). \quad (3.13)$$

Remarque 3.2.2 *Il n'existe pas de fonction localement sommable Δ qui ait la propriété suivante :*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \int_{\mathbb{R}} \Delta \phi dx = \phi(0) \quad (3.14)$$

En conséquence, la distribution de Dirac est une distribution singulière.

3.3 Opérations sur les distributions

3.3.1 La distribution $T(\frac{x}{a})$.

Considérons tout d'abord une distribution associée à une fonction localement sommable f . On a :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \left\langle T_{f(\frac{x}{a})}, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{a}\right) \phi(x) dx \quad (3.15)$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{x}{a}$, on obtient :

$$\left\langle T_{f(\frac{x}{a})}, \phi \right\rangle = |a| \int_{\mathbb{R}} f(u) \phi(au) du \quad (3.16)$$

Cette propriété suggère la définition suivante :

$$\left\langle T\left(\frac{x}{a}\right), \phi \right\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} |a| \langle T(x), \phi(ax) \rangle \quad (3.17)$$

On a ainsi :

$$\left\langle \delta\left(\frac{x}{a}\right), \phi \right\rangle = |a| \langle \delta(x), \phi(ax) \rangle = |a| \phi(0) = |a| \langle \delta(x), \phi(x) \rangle \quad (3.18)$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour toute fonction test, on obtient la propriété suivante :

$$\delta\left(\frac{x}{a}\right) = |a| \delta(x) \quad (3.19)$$

3.3.2 Dérivation d'une distribution

Soit T_f une distribution associée à une fonction f localement sommable à dérivée continue (donc localement sommable), si l'on veut généraliser, à certains égards la notion de fonction, il est souhaitable que la définition de la dérivée au sens des distributions soit telle que $T'_f = T_{f'}$.

Dans ce cas particulier, on a :

$$\langle T'_f, \phi \rangle = \langle T_{f'}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f' \phi dx = [f \phi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f \phi' dx \quad (3.20)$$

Or $\phi(\pm\infty) = 0$, d'où :

$$\langle T'_f, \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f \phi' dx = - \langle T_f, \phi' \rangle \quad (3.21)$$

Ce résultat suggère la définition suivante :

Définition de la dérivée d'une distribution

La dérivée d'une distribution T , notée T' est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \langle T', \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} - \langle T, \phi' \rangle \quad (3.22)$$

Conséquences

$$\begin{aligned} - \forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \langle T'', \phi \rangle &= - \langle T', \phi' \rangle = \langle T, \phi'' \rangle \\ - \forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta', \phi \rangle &= - \langle \delta, \phi' \rangle = - \phi'(0) \end{aligned}$$

Dérivée de distributions associées à des fonctions localement sommables

Dérivée de la fonction de Heaviside \mathbf{H} Il est d'abord évident que la fonction \mathbf{H} est localement sommable : on peut donc lui associer une distribution régulière que l'on appellera encore \mathbf{H} (plutôt que $T_{\mathbf{H}}$). On a, par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathfrak{D}, \quad \langle \mathbf{H}', \phi \rangle &= -\langle \mathbf{H}, \phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H} \phi' dx = -\int_0^{+\infty} \phi' dx \\ &= -[\phi]_0^{+\infty} = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

On a donc le résultat fondamental suivant :

$$\mathbf{H}' = \delta \quad (3.24)$$

Dérivée d'une fonction localement sommable admettant une discontinuité de première espèce en $x = a$ On va supposer que la fonction f admet une discontinuité du premier ordre au point $x = a$ (c'est-à-dire que la fonction admet un saut fini en ce point) et est dérivable en dehors de ce point. On a alors :

$$\forall \phi \in \mathfrak{D}, \quad \langle T_f', \phi \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle = -\left(\int_{-\infty}^a f \phi' dx + \int_a^{+\infty} f \phi' dx \right) \quad (3.25)$$

En intégrant par parties, on est conduit à :

$$\int_{-\infty}^a f \phi' dx + \int_a^{+\infty} f \phi' dx = f(a_-)\phi(a) - \int_{-\infty}^a f' \phi dx - f(a_+)\phi(a) - \int_a^{+\infty} f' \phi dx \quad (3.26)$$

En posant $[f]_{x=a} = f(a_+) - f(a_-)$, que l'on appelle saut de la fonction au point a , on trouve :

$$\langle T_f', \phi \rangle = [f]_{x=a} \delta_a + \langle T_{f'}, \phi \rangle \quad (3.27)$$

Par la suite, par un abus de notation bien utile et couramment utilisé, on identifiera T_f' à f' (on parlera alors de dérivée au sens des distributions) et $T_{f'}$ à $\{f'\}$ (on parlera alors de dérivée sans précaution), on écrira alors :

$$f' = \{f'\} + [f]_{x=a} \delta_a \quad (3.28)$$

Bien entendu, s'il y a plusieurs points de discontinuité (aux points a_i), on aura :

$$f' = \{f'\} + \sum_i [f]_{x=a_i} \delta_{a_i} \quad (3.29)$$

Remarque 3.3.1 Par un abus de notation supplémentaire, on écrira $\delta(x - a_i)$ plutôt que δ_{a_i} .

Dérivée seconde de distributions associées aux fonctions localement sommables

Supposons que la fonction f soit deux fois dérivable sauf éventuellement en un point a . On a alors

$$f' = \{f'\} + [f]_{x=a} \delta_a \quad (3.30)$$

et

$$\{f'\}' = \left\{ \{f'\}' \right\} + [f']_{x=a} \delta_a \quad (3.31)$$

En notant $\{\{f'\}'\} = \{f''\}$ (dérivée seconde sans précaution), on obtient :

$$f'' = \{f''\} + [f]_{x=a} \delta'_a + [f']_{x=a} \delta_a \quad (3.32)$$

Le lecteur pourra, bien entendu, généraliser ce genre de résultat à des dérivées supérieures même si leur utilisation en Physique est assez rare.

3.3.3 Un exemple fructueux d'utilisation de dérivée au sens des distributions : (la distribution $Vp\left(\frac{1}{x}\right)$)

La fonction $\frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* n'est pas localement sommable au voisinage de zéro. Il semble donc qu'on ne puisse pas lui associer une distribution régulière, ce qui est fâcheux surtout si l'on songe que nous nous proposons grâce aux distributions d'étendre la notion de fonction. On peut, cependant, surmonter cet obstacle en remarquant que si $\frac{1}{x}$ n'est pas une fonction localement sommable, sa primitive (au sens des fonctions) $\ln(|x|)$ l'est. Il suffit alors de définir une nouvelle distribution appelée *valeur principale de $\frac{1}{x}$* , et notée $Vp\left(\frac{1}{x}\right)$ qui, par définition, est la dérivée de la distribution régulière associée à la fonction (localement sommable) $\ln(|x|)$.

$$Vp\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln'(|x|) \quad (\text{il faut comprendre } Vp\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{\text{déf}}{=} T'_{\ln(|x|)}) \quad (3.33)$$

La question est alors de savoir ce que vaut la quantité $\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right), \phi \rangle$ pour une fonction test ϕ donnée.

$$\left\langle Vp\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \langle T'_{\ln(|x|)}, \phi \rangle = -\langle T_{\ln(|x|)}, \phi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|) \phi' dx \quad (3.34)$$

On pose alors \mathcal{I}_ϵ la quantité suivante :

$$\mathcal{I}_\epsilon = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(|x|) \phi' dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \ln(|x|) \phi' dx \quad (3.35)$$

La fonction $\ln(|x|)\phi'$ étant sommable localement, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|) \phi' dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_\epsilon \quad (3.36)$$

D'autre part, on a l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(|x|) \phi' dx = [\ln(|x|)\phi]_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi}{x} dx \quad (3.37)$$

Comme on a $\phi(-\infty) = 0$, il vient

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln(|x|) \phi' dx = \ln(\epsilon)\phi(-\epsilon) - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi}{x} dx \quad (3.38)$$

De la même façon, on obtiendrait :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \ln(|x|) \phi' dx = -\ln(\epsilon)\phi(\epsilon) - \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi}{x} dx \quad (3.39)$$

En résumé, on a donc

$$\mathcal{I}_\epsilon = \ln(\epsilon)\phi(-\epsilon) - \ln(\epsilon)\phi(\epsilon) - \int_{\mathbb{R}-[-\epsilon, +\epsilon]} \frac{\phi}{x} dx \quad (3.40)$$

soit encore

$$-\mathcal{I}_\epsilon = \ln(\epsilon)(\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)) + \int_{\mathbb{R}-[-\epsilon, +\epsilon]} \frac{\phi}{x} dx \quad (3.41)$$

On va maintenant évaluer le terme de droite quand ϵ tend vers zéro. Pour ce faire, faisons un développement limité de $\phi(\epsilon)$:

$$\phi(\epsilon) = \phi(0) + \epsilon\phi'(0) + o(\epsilon) \quad (3.42)$$

De même, on aurait :

$$\phi(-\epsilon) = \phi(0) - \epsilon\phi'(0) + o(\epsilon) \quad (3.43)$$

ce qui nous conduit à

$$\ln(\epsilon)(\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)) = 2\epsilon \ln(\epsilon)\phi'(0) + o(\epsilon) \ln(\epsilon) \quad (3.44)$$

Les deux termes du membre de droite tendant vers zéro quand ϵ tend vers zéro, on obtient finalement :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\mathcal{I}_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}_{-[-\epsilon, +\epsilon]}} \frac{\phi}{x} dx = Vp \left\{ \int \frac{\phi}{x} dx \right\} \quad (3.45)$$

3.4 Produit de deux distributions

3.4.1 Produit de deux distributions régulières

Il serait évidemment souhaitable que, compte tenu du dessein que nous avons de généraliser la notion de fonctions, nous ayons :

$$T_{fg} = T_f T_g \quad (3.46)$$

Malheureusement, il se peut que f et g soient des fonctions localement sommables sans que le produit des deux le soit (Que l'on songe à $f = g = \frac{1}{\sqrt{x}}$). Il semble donc que la situation soit désespérée. Néanmoins, on peut, *dans certains cas*, parler de produit de deux distributions.

3.4.2 Produit d'une distribution quelconque T par une fonction indéfiniment dérivable α

On a la définition suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \langle \alpha T, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \alpha \phi \rangle \quad (3.47)$$

Cette définition a bien un sens car si α est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ et ϕ une fonction de \mathcal{D} , $\alpha\phi$ est dans \mathcal{D} . La fonction $\alpha\phi$ est donc une «bonne» fonction test.

Remarque 3.4.1 *Pour certaines distributions comme δ (resp. δ'), α n'a pas besoin d'être dans $C^\infty(\mathbb{R})$, il suffit qu'elle soit continue (resp. dérivable)*

Avec une fonction α continue, on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \quad \langle \alpha \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \alpha \phi \rangle = \alpha(0)\phi(0) = \alpha(0) \langle \delta, \phi \rangle = \langle \alpha(0)\delta, \phi \rangle \quad (3.48)$$

On a donc l'égalité fondamentale suivante :

$$\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x) \quad (3.49)$$

En utilisant les différentes définitions introduites jusqu'à maintenant le lecteur pourra démontrer la propriété suivante :

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T' \quad (3.50)$$

3.5 Suite de distributions

3.5.1 Définition

On dit qu'une suite de distributions T_α converge vers une distribution T lorsque α tend vers λ (valeur finie ou non) si et seulement si $\forall \phi \in \mathcal{D}, \langle T_\alpha, \phi \rangle \xrightarrow[\alpha \rightarrow \lambda]{C.S.} \langle T, \phi \rangle$ (on note alors $T_\alpha \xrightarrow[\alpha \rightarrow \lambda]{\mathcal{D}'}$ T).

Exemple 3.5.1 *Introduisons la famille de fonctions suivantes :*

$$\tilde{\Pi}_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & , \text{ si } |x| < \alpha/2 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (3.51)$$

Calculons alors l'expression $\langle \tilde{\Pi}_\alpha, \phi \rangle$:

$$\langle \tilde{\Pi}_\alpha, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\Pi}_\alpha \phi \, dx = \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \phi(x) \, dx = \phi(c_\alpha) \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} dx = \phi(c_\alpha) \quad (3.52)$$

avec c_α dans l'intervalle $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$. On a alors, pour toute fonction test :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle \tilde{\Pi}_\alpha, \phi \rangle = \phi(c_0) = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \quad (3.53)$$

On peut alors en conclure que $\tilde{\Pi}_\alpha \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{\mathcal{D}'}$ δ . Nous retrouvons ainsi le résultat évoqué au début du chapitre.

4

Notions sur les distributions de plusieurs variables

Sommaire

4.1	Définition	37
4.2	Exemple de distributions de plusieurs variables	38
4.2.1	Distributions régulières	38
4.2.2	Deux exemples de distributions singulières $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ et $\alpha\delta_S$	38
4.2.3	Dérivée partielle d'une distribution	38
4.2.4	Dérivation d'une fonction sommable discontinue	39

En Physique il arrive souvent que l'on manipule des grandeurs physiques que l'on associe à des grandeurs mathématiques plus complexes que celles étudiées précédemment, comme des fonctions scalaires de plusieurs variables. C'est le cas, par exemple, de la température d'une pièce $\theta(x, y, z, t)$, cette température dépendant du lieu et du temps. On peut manipuler des grandeurs plus complexes encore comme des fonctions vectorielles, c'est le cas, par exemple d'un champ électrique $\mathbf{E}(x, y, z, t)$. Le but de ce chapitre est de se familiariser avec les distributions de plusieurs variables et de montrer que les conditions de passage associées aux équations de Maxwell (parfois appelées abusivement relations de continuité) découlent des équations de Maxwell si l'on admet que celles-ci doivent être comprises au «sens des distributions».

4.1 Définition

On appelle distribution de \mathbb{R}^k une forme linéaire et continue sur l'espace vectoriel \mathcal{D}^k qui est l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R}^k indéfiniment différentiables à support borné¹.

1. En pratique, en Physique, k vaut 1, 2, 3 ou 4.

4.2 Exemple de distributions de plusieurs variables

4.2.1 Distributions régulières

Les distributions régulières sont les distributions associées aux fonctions localement sommables. Prenons, par exemple, une fonction f localement sommable sur \mathbb{R}^3 . On lui associe une distribution T_f (notée par abus de notation encore f) qui est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathfrak{D}^3, \quad T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} f \phi d^3\mathbf{r} \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3) \phi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.2.2 Deux exemples de distributions singulières $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ et $\alpha\delta_S$

$$\forall \phi \in \mathfrak{D}^3, \quad \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \phi \rangle = \phi(x_0, y_0, z_0) = \phi(\mathbf{r}_0) \quad (4.2)$$

Cette distribution sert, par exemple, à représenter une densité de masse ponctuelle (masse ponctuelle) ou une densité de charge ponctuelle. Ainsi une charge ponctuelle, de charge q , placée au point de coordonnées $(x_0, y_0, z_0) = (\mathbf{r}_0)$ aura-t-elle comme densité de charge, la densité ρ avec : $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

$$\forall \phi \in \mathfrak{D}^3, \quad \langle \alpha\delta_S, \phi \rangle = \int_S \alpha \phi ds \quad (4.3)$$

Cette distribution sert, par exemple, à représenter une densité surfacique de courant. Ainsi le courant de surface \mathbf{j}_S aura-t-il comme densité associée la distribution \mathfrak{J}_S telle que : $\mathfrak{J}_S = \mathbf{j}_S \delta_S$.

4.2.3 Dérivée partielle d'une distribution

Nous allons, comme à l'accoutumée, commencer nos manipulations avec les distributions régulières, à savoir :

$$\begin{aligned} \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \phi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \phi dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \phi dx_1 \right] dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[[f\phi]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 \right] dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

La fonction ϕ étant à support bornée, on a l'égalité $\phi(\pm\infty, x_2, x_3) = 0$ ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \phi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[- \int_{\mathbb{R}} f \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 \right] dx_2 dx_3 \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= - \left\langle T_f, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cette propriété suggère la définition suivante :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \phi \right\rangle \stackrel{\text{déf}}{=} - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\rangle \quad (4.6)$$

Cette définition conduit immédiatement à :

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \phi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \quad (4.7)$$

4.2.4 Dérivation d'une fonction sommable discontinue

Considérons une surface S «assez régulière» «partageant clairement» l'espace tout entier (ici \mathbb{R}^3) en deux domaines distincts Ω_1 et Ω_2 , de sorte que Ω_1 , Ω_2 et S forment une partition de \mathbb{R}^3 . On entend par «partager clairement» qu'il existe au moins un couple de points (M_1, M_2) telle que tout «chemin» allant de M_1 à M_2 «rencontre» nécessairement S (cf. figures 4.2–4.4).

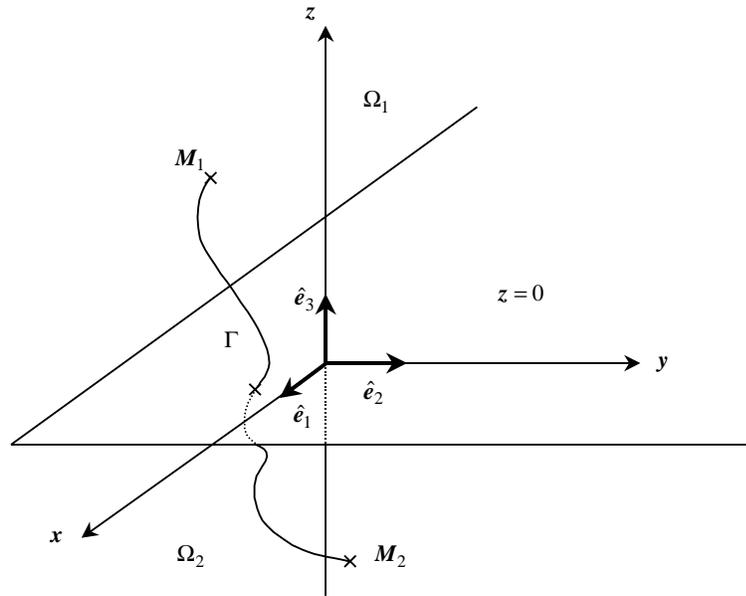


FIGURE 4.1 – Exemple 1 : Le plan $z = 0$ partage clairement deux demi-espaces : le demi-espace $z < 0$ et le demi-espace $z > 0$.

Définition du saut d'une fonction à la «traversée» d'une surface

Supposons maintenant qu'une fonction f prenne deux formes différentes suivant qu'elle est dans Ω_1 ou Ω_2 . On notera $f|_{\Omega_1}$ la restriction de la fonction f au domaine Ω_1 et $f|_{\Omega_2}$ la restriction de la fonction f au domaine Ω_2 (cf. fig. 4.5), de sorte que l'on puisse écrire :

$$f(M) = \begin{cases} f|_{\Omega_1}(M) & , \text{ si } M \in \Omega_1 \\ f|_{\Omega_2}(M) & , \text{ si } M \in \Omega_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

On note alors $f_i(P)$ la quantité suivante :

$$f_i(P) = \begin{cases} \lim_{\substack{M_i \in \Omega_i \\ M_i \xrightarrow{\Gamma_i} P \\ P \in S}} f|_{\Omega_i} \end{cases} \quad (4.9)$$

et l'on appelle saut de f au point P , la quantité notée $[f]_S$ telle que :

$$[f]_S \stackrel{\text{déf}}{=} f_2 - f_1, \quad (4.10)$$

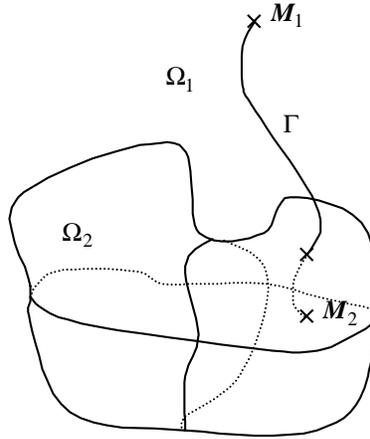


FIGURE 4.2 – Exemple 2 : La surface partage clairement deux domaines : un domaine borné Ω_2 (intérieur) et un domaine non borné Ω_1 (extérieur).

si le vecteur normal $\hat{\mathbf{n}}$ «pointe» vers le milieu 2 et

$$[f]_{|S} \stackrel{\text{déf}}{=} f_1 - f_2 \quad (4.11)$$

si le vecteur normal $\hat{\mathbf{n}}$ «pointe» vers le milieu 1.

Remarque 4.2.1 *Il est important de noter que le saut d'une fonction est défini à un signe près, car le choix de l'orientation de la normale est évidemment arbitraire, ce qui peut sembler curieux de prime abord. Heureusement, comme nous allons le voir, nous allons manipuler des expressions du type $[f]_{|S} n_k$ (où $n_k = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k$) et cette dernière expression est indépendante du choix de la normale.*

Quelques résultats fondamentaux

Compte-tenu de ces notations et de ces mises en garde, on peut montrer le résultat fondamental suivant :

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_1} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}} + [f]_{|S} n_1 \delta_S \quad (4.12)$$

que l'on note souvent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\} + [f]_{|S} n_1 \delta_S . \quad (4.13)$$

A partir de ce résultat fondamental (cf. T.D.), on peut montrer les égalités suivantes qui sont très utiles en électromagnétisme :

$$\nabla f = \{ \nabla f \} + [f]_{|S} \hat{\mathbf{n}} \delta_S \quad (4.14)$$

En généralisant les résultats obtenus pour des fonctions scalaires à des fonctions vectorielles on trouve sans trop de mal les résultats suivants :

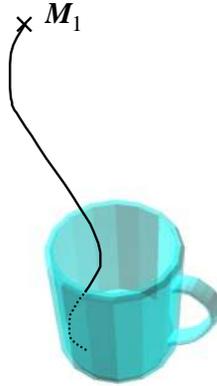


FIGURE 4.3 – Contre-exemple 1 : Verser du thé à l'«intérieur» de la tasse n'a pas de sens.

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \{\operatorname{div} \mathbf{f}\} + \widehat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{f}]_{|S} \delta_S \quad (4.15)$$

et

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \{\operatorname{rot} \mathbf{f}\} + \widehat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{f}]_{|S} \delta_S \quad (4.16)$$

Remarque 4.2.2 *Il est important de noter que les expressions $[f]_{|S} \widehat{\mathbf{n}}$, $\widehat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{f}]_{|S}$ et $\widehat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{f}]_{|S}$ sont indépendantes du choix de la normale.*

Application à l'électromagnétisme

Un énoncé moderne des équations de Maxwell peut se présenter sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} (M.F.) & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} (M.A.) \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho (M.G.) & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 (M.\Phi.) \end{aligned} \quad (4.17)$$

ces équations devant être comprises au sens des distributions.²

La distribution ρ désigne la distribution associée à la densité de charge. Supposons que cette densité de charge soit la somme d'une densité volumique de charge et d'une densité surfacique de charge. On associe à la densité volumique de charge une distribution régulière ρ_V et l'on associe à la densité surfacique de charge une distribution singulière que l'on écrira $\rho_S \delta_S$. On doit avoir³ :

$$\rho = \rho_V + \rho_S \delta_S \quad (4.18)$$

2. En toute rigueur, il faudrait écrire $\operatorname{div} T_{\mathbf{D}} = T_\rho$ etc... Mais, afin d'alléger l'écriture, nous confondrons systématiquement, par la suite, la fonction et la distribution associée à cette même fonction.

3. Il faut comprendre, $\forall \phi \in \mathcal{D}^3$, $\langle \rho, \phi \rangle = \langle \rho_V + \rho_S \delta_S, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_V \phi d^3 \mathbf{r} + \int_S \rho_S \phi d^2 s$

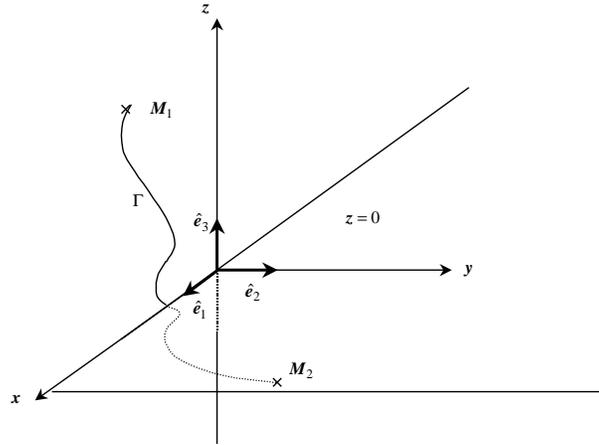


FIGURE 4.4 – Contre-exemple 2 : le demi-plan ($z = 0, y > 0$) ne partage pas «clairement» l'espace.

Par ailleurs, nous avons : $\text{div } \mathbf{D} = \{\text{div } \mathbf{D}\} + \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}]_{|S} \delta_S = \rho_V + \rho_S \delta_S$, ce qui nous conduit aux deux égalités suivantes :

$$\{\text{div } \mathbf{D}\} = \rho_V \quad (\text{égalité des distributions régulières}) \quad (4.19)$$

et

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}]_{|S} = \rho_S \quad (\text{égalité des distributions singulières}) \quad (4.20)$$

Remarque 4.2.3 *On a admis implicitement que*

1. *si S est une distribution régulière et T une distribution singulière alors $S+T = 0$ donnait $S = 0$ et $T = 0$. Dans le cas contraire, on aurait $S = -T$ (égalité d'une distribution singulière et d'une distribution régulière ???)*
2. *si $\alpha \delta_S = 0$ alors $\alpha = 0$*

Remarque 4.2.4 *Si la densité surfacique de charge est nulle, on a $\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}]_{|S} = 0$: on dit alors qu'il y a continuité des composantes normales de \mathbf{D} .*

Examinons maintenant les autres équations :

L'égalité $\text{div } \mathbf{B} = \{\text{div } \mathbf{B}\} + \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{B}]_{|S} \delta_S = 0$ donne

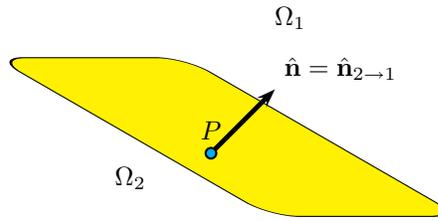
$$\{\text{div } \mathbf{B}\} = 0 \quad (4.21)$$

et

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{B}]_{|S} = 0 \quad (4.22)$$

On voit qu'il y a **toujours continuité des composantes normales de \mathbf{B}** .

L'équation de Maxwell Faraday donne l'égalité $\text{rot } \mathbf{E} = \{\text{rot } \mathbf{E}\} + \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}]_{|S} \delta_S = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, ce qui donne

FIGURE 4.5 – La normale «pointée» vers le milieu Ω_1 .

$$\{\text{rot } \mathbf{E}\} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.23)$$

et

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}]_S = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

On voit qu'il y a toujours continuité des composantes tangentielles de \mathbf{E}

Enfin il nous reste l'équation de Maxwell Ampère qui donne $\text{rot } \mathbf{H} = \{\text{rot } \mathbf{H}\} + \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}]_S \delta_S = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Supposons que la densité de courant \mathbf{j} soit la somme d'une densité volumique de courant \mathbf{j}_V qui est associée à une distribution régulière et une densité surfacique de charge qui est associée à une densité singulière $\mathbf{j}_S \delta_S$. Dans ces conditions, on aura :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_V + \mathbf{j}_S \delta_S \quad (4.25)$$

et par conséquent

$$\{\text{rot } \mathbf{H}\} + \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}]_S \delta_S = \mathbf{j}_V + \mathbf{j}_S \delta_S + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.26)$$

soit en égalant les parties régulières et singulières :

$$\{\text{rot } \mathbf{H}\} = \mathbf{j}_V + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.27)$$

et

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}]_S \delta_S = \mathbf{j}_S \delta_S \quad (4.28)$$

Remarque 4.2.5 Si le courant de surface est nul, on a $\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}]_S = \mathbf{0}$: on a alors continuité des composantes tangentielles du champ \mathbf{H} .

5

Produit de convolution

Sommaire

5.1	Définition	45
5.2	Propriétés du produit de convolution	45
5.3	Produit de convolution de deux distributions	46
5.4	Produit de convolution de trois distributions	47
5.5	Exemples de convolution de distributions	47
5.5.1	$S * \delta$	47
5.5.2	$S * \delta'$	47
5.5.3	Opérateurs différentiels à coefficients constants	48
5.6	Exemples d'utilisation du produit de convolution en Physique	48
5.6.1	Le filtre linéaire et continu	48
5.6.2	L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f$	49
5.7	Transformée de Fourier d'un produit de convolution	49
5.8	Produit de convolution de fonctions de plusieurs variables	50

5.1 Définition

Soit f et g deux fonctions, on définit la fonction h comme produit de convolution de f par g (noté $f * g$) de la manière suivante :

$$h = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u) du \quad (5.1)$$

Bien entendu, il faut, pour que l'expression ci-dessus ait un sens, que l'expression $f(u)g(x-u)$ soit sommable pour tout x .

5.2 Propriétés du produit de convolution

1. Le produit de convolution est commutatif : $f * g = g * f$

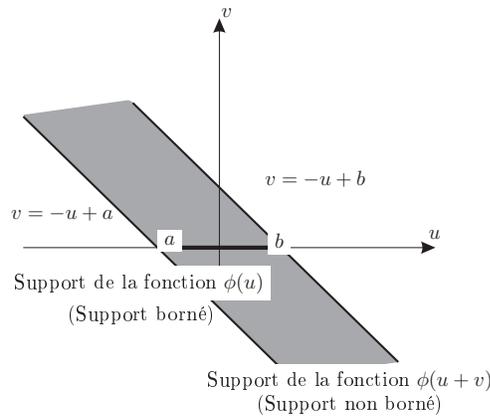


FIGURE 5.1 – Le support de la fonction $\phi(u)$ est borné $([a, b])$, alors que le support de la fonction $\phi(u+v)$ est non borné.

2. Le produit de convolution est distributif par rapport à l'addition, à savoir :
- $$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

Remarque 5.2.1 Ces deux propriétés et celle de l'associativité dans un grand nombre de cas (que l'on pourrait qualifier de non pathologique) nous font comprendre pourquoi cet opérateur s'appelle produit de convolution.

5.3 Produit de convolution de deux distributions

Soit f et g deux fonctions admissibles, on a :

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathfrak{D}, \quad \langle f * g, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u) du \right] \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(u)g(x-u)\phi(x) dudx \end{aligned} \quad (5.2)$$

En faisant le changement de variable $v = x - u$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \langle f * g, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(u)g(v)\phi(u+v) dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \left[\int_{\mathbb{R}} g(v)\phi(u+v)dv \right] du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \langle g(v), \phi(u+v) \rangle du \\ &= \langle f(u), \langle g(v), \phi(u+v) \rangle \rangle \\ &= \langle f(u) \otimes g(v), \phi(u+v) \rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

Pour deux distributions S et T quelconques, on est donc tenté de prendre la définition suivante :

$$\forall \phi \in \mathfrak{D}, \quad \langle S * T, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle S(u) \otimes T(v), \phi(u+v) \rangle \quad (5.4)$$

Malheureusement la fonction $\phi(u+v)$ en tant que fonction des deux variables u et v n'est pas à support borné même si elle est à support borné en tant que fonction de u (v est alors un paramètre) et en tant que fonction de v (u est alors un paramètre) comme on peut s'en persuader en regardant la figure (5.1)

On peut néanmoins s'assurer de l'existence de $S * T$, dans les deux cas suivants :

1. S ou T est à support borné
2. S et T sont tous les deux à support borné du même côté.

5.4 Produit de convolution de trois distributions

On définit $R * S * T$ de la manière suivante :

$$\forall \phi \in \mathfrak{D}, \quad \langle R * S * T, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle R(u) \otimes S(v) \otimes T(w), \phi(u + v + w) \rangle \quad (5.5)$$

Sous réserve d'existence¹ la loi $*$ est associative, i.e. : $(R * S) * T = R * (S * T) = R * S * T$

5.5 Exemples de convolution de distributions

5.5.1 $S * \delta$

On a successivement :

$$\begin{aligned} \langle S * \delta, \phi \rangle &= \langle S(u) \otimes \delta(v), \phi(u + v) \rangle \\ &= \langle S(u), \langle \delta(v), \phi(u + v) \rangle \rangle \\ &= \langle S(u), \phi(u) \rangle \end{aligned} \quad (5.6)$$

On en déduit le résultat fondamental suivant :

$$S * \delta = S \quad (5.7)$$

La distribution de Dirac est l'élément neutre de la convolution

Remarque 5.5.1 Si l'on traite la distribution δ comme une fonction et si S est une distribution régulière associée à une fonction sommable f , on écrit, comme on le voit dans de nombreux ouvrages destinés aux physiciens :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x') \delta(x - x') dx' = f(x) \quad (5.8)$$

Cette expression est évidemment condamnable, mais est très utile, comme nous le verrons par la suite surtout si l'on est conscient du risque que l'on encourt.

5.5.2 $S * \delta'$

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \langle S * \delta', \phi \rangle &= \langle S(u), \langle \delta'(v), \phi(u + v) \rangle \rangle \\ &= \langle S(u) - \langle \delta(v), \phi'(u + v) \rangle \rangle \\ &= - \langle S(u), \phi'(u) \rangle \\ &= \langle S'(u), \phi(u) \rangle \end{aligned} \quad (5.9)$$

On en déduit le résultat suivant :

$$S * \delta' = S' \quad (5.10)$$

En écrivant $(S * T)' = (S * T) * \delta'$ et en utilisant la distributivité de la convolution on obtient un résultat très important dans la pratique :

$$(S * T)' = S * T' = S' * T \quad (5.11)$$

1. Par exemple

1. si deux, au moins, sont à support borné.
2. si toutes les distributions sont à support borné du même côté.

5.5.3 Opérateurs différentiels à coefficients constants

On peut évidemment généraliser les résultats obtenus plus haut à un opérateur différentielle à coefficients constants \tilde{D} . Pour cet opérateur, il existe une distribution D telle que $\tilde{D}(u) = D * u$.

5.6 Exemples d'utilisation du produit de convolution en Physique

Considérons un système Physique pour lequel on peut définir clairement deux signaux, l'un correspondant à une entrée e et l'autre à une sortie s . Ces fonctions e et s peuvent, par exemple, représenter les tensions à l'entrée et à la sortie d'un circuit électrique, ou bien représenter respectivement la force imposée à un système mécanique et le mouvement du système sous l'action de ladite force. Supposons, pour simplifier, que ces deux signaux ne dépendent que d'une variable (le temps, par exemple) de sorte que les fonctions e et s sensées représenter les deux signaux soient des fonctions de la variable t . On peut alors, au moins formellement, écrire qu'il existe un opérateur \mathbf{S} , qui à s associe e :

$$s = \mathbf{S}(e) \quad (5.12)$$

Nous allons voir, dans ce qui suit, que, pourvu que l'opérateur \mathbf{S} soit doté de certaines propriétés assez générales et souvent rencontrées en Physique, la donnée d'une entrée *ad hoc* permet de déterminer l'opérateur \mathbf{S} et par suite de déterminer s à partir de e .

5.6.1 Le filtre linéaire et continu

On définit tout d'abord un opérateur de translation τ_{t_0} . Pour tout réel t , on a l'égalité : $\tau_{t_0}(s(t)) = s(t - t_0)$.

Ayant défini l'opérateur de translation on va supposer que l'opérateur \mathbf{S} a les trois propriétés suivantes :

1. L'opérateur \mathbf{S} commute avec tout opérateur de translation. On a alors l'égalité

$$s(t - t_0) = \mathbf{S}(e(t - t_0)), \quad (5.13)$$

pour tout t et tout t_0 .

2. L'opérateur \mathbf{S} est linéaire : $(\mathbf{S}(a_1 e_1 + a_2 e_2)) = a_1 \mathbf{S}(e_1) + a_2 \mathbf{S}(e_2)$
3. L'opérateur \mathbf{S} est continu i.e :

$$\text{si } e_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} e \text{ alors } \mathbf{S}(e_k) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbf{S}(e)^2$$

Dans ces conditions, on peut montrer qu'il existe une distribution de Schwartz S telle que

$$s = S * e \quad (5.14)$$

Ce résultat, en apparence anodin, est en fait extrêmement riche comme nous allons le voir tout de suite. Il semble en effet que l'on n'ait fait aucun progrès puisque l'on ne connaît pas la distribution S . Contrairement à ce que l'on pourrait croire de prime abord il suffit d'une seule mesure pour connaître S . En effet, si l'on note s_e la sortie (mettant en évidence que l'entrée dépend de la sortie!) et si l'on admet qu'à l'entrée on puisse simuler une distribution singulière, en l'occurrence δ ,

2. En pratique, on pourra toujours admettre, en Physique, que si un opérateur est linéaire, il est continu.

on a l'égalité : $s_\delta = S * \delta = S$. Cette dernière égalité nous conduit à la conclusion suivante :

Conclusion 5.6.1 *Pour un filtre linéaire et continu, il suffit de connaître la réponse (la sortie) à une entrée δ (réponse impulsionnelle) pour connaître la réponse à n'importe quelle entrée par un simple produit de convolution.*

Remarque 5.6.2 *Le lecteur pourrait, à juste titre, se demander si l'on est capable de simuler, en pratique, une impulsion suffisamment brève et intense pour pouvoir imiter une distribution de Dirac : dans le cas contraire, le résultat remarquable énoncé plus haut aurait un intérêt bien mince. Il faut retenir que, dans de nombreux cas, on est capable expérimentalement de produire des signaux d'entrée qui reproduisent suffisamment fidèlement une distribution de Dirac pour pouvoir exploiter l'égalité 5.14. Mais, autre résultat remarquable, même si l'on ne peut pas reproduire un tel signal, on peut presque toujours produire un signal quasiment constant et pendant suffisamment longtemps pour imiter un échelon de Heaviside. Il suffit alors de remarquer que $s_H = S * H$ et $s'_H = (S * H)' = S * H' = S * \delta = S = s_\delta$. Il suffit de dériver la réponse à «un échelon» (réponse indicielle) pour trouver la réponse impulsionnelle.*

5.6.2 L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = f$

L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = f$ est un cas particulier de filtre linéaire et continu pour lequel la fonction f joue le rôle de signal de sortie et x de signal d'entrée puisque l'on peut réécrire cette équation comme suit : $(\delta'' + \omega_0^2\delta) * x = f$. La distribution de Schwartz S est alors, dans ce cas, la distribution singulière $\delta'' + \omega_0^2\delta$. Malheureusement, en général, la fonction x est inconnue (elle joue le rôle de signal de sortie) cependant que f est connue (elle joue le rôle de signal d'entrée). Dans ce cas, voici comment on procède.

On cherche d'abord une distribution x_δ solution de l'équation :

$$\frac{d^2x_\delta}{dt^2} + \omega_0^2x_\delta = \delta \quad (5.15)$$

On conclut en remarquant que $x = x_\delta * f$ est bien solution de l'équation cherchée. La recherche de la fonction x_δ sera faite lors d'une séance T.D.

5.7 Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On considère une fonction h qui est le résultat du produit de convolution de f par g . On cherche à évaluer la Transformée de Fourier de h :

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(u) g(x-u) du \right] e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(u) g(x-u) e^{-2i\pi\nu x} dudx \end{aligned} \quad (5.16)$$

En faisant le changement de variable $v = x - u$, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\nu) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(u) g(v) e^{-2i\pi\nu u} e^{-2i\pi\nu v} dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi\nu u} du \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{-2i\pi\nu v} dv \\ &= \widehat{f}(\nu) \widehat{g}(\nu) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Conclusion 5.7.1 *La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit des transformées de Fourier des deux fonctions.*

Inversement, on pourrait montrer que la transformée de Fourier du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier des deux fonctions. On a ainsi le schéma suivant :

$$\boxed{f * g \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{F}^- \text{ ou } \mathfrak{F}^+} \\ \xleftarrow{\mathfrak{F}^- \text{ ou } \mathfrak{F}^+} \end{array} f g} \quad (5.18)$$

5.8 Produit de convolution de fonctions de plusieurs variables

On peut évidemment étendre les notions que l'on vient de voir à des fonctions (ou distributions) de plusieurs variables. Ainsi, si f et g sont deux fonctions, on définit la fonction h comme produit de convolution de f par g que l'on note encore $f * g$ de la manière suivante :

$$h = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)g(x - u, y - v) dudv \quad . \quad (5.19)$$

6

Transformée de Fourier des distributions tempérées

Sommaire

6.1	Introduction	51
6.2	Définition de l'espace \mathcal{S} des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide	52
6.3	Définition des distributions tempérées	52
6.4	Définition des fonctions à croissance lente à l'infini	52
6.5	Dérivée d'une distribution tempérée	53
6.6	Transformation de Fourier d'une distribution tempérée	53
6.7	Transformation inverse de Fourier dans \mathcal{S}'	53
6.8	Propriétés de la Transformation de Fourier des distributions tempérées	53
6.8.1	Dérivée de la transformée de Fourier d'une distribution.	53
6.8.2	Transformée de Fourier de la dérivée d'une distribution.	54
6.8.3	Translation de la transformée de Fourier d'une distribution	54
6.8.4	Transformée de Fourier de la translation d'une distribution	54
6.9	Exemples de Transformées de Fourier dans \mathcal{S}'	54
6.9.1	Transformation de Fourier de δ	54
6.9.2	Transformation de Fourier de δ'	54
6.9.3	Transformation de Fourier de $\exp(2i\pi ax)$	55
6.9.4	Transformation de Fourier de la fonction $\operatorname{sgn}(x)$	55
6.9.5	Transformation de Fourier de la fonction de Heaviside $\mathbf{H}(x)$.	56

6.1 Introduction

Poursuivant notre but de généraliser la notion de fonctions, nous allons tenter de généraliser la notion de Transformée de Fourier aux distributions introduites dans un précédent chapitre. De manière assez formelle, considérons une distribution régulière associée à une fonction localement sommable T_f . Supposons de plus que

\widehat{f} soit aussi sommable de sorte qu'on puisse lui associer une distribution notée $T_{\widehat{f}}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \langle T_{\widehat{f}}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu) \phi(\nu) d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \right] \phi(\nu) d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}} \phi(\nu) e^{-2i\pi\nu x} d\nu \right] dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{\phi}(x) dx \\
 &= \langle T_f, \widehat{\phi} \rangle
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Une définition naturelle de la transformée de Fourier d'une distribution semble donc :

$$\langle T_{\widehat{f}}, \phi \rangle = \langle T_f, \widehat{\phi} \rangle \tag{6.2}$$

Malheureusement la fonction $\widehat{\phi}$ est une mauvaise fonction test car on peut montrer qu'en dehors de la fonction nulle toute fonction à support bornée a une transformée de Fourier à support non borné de sorte que l'expression $\langle T_f, \widehat{\phi} \rangle$ n'a pas de sens puisque $\widehat{\phi}$ n'est pas une fonction de \mathcal{D} . Il faut donc que les fonctions tests appartiennent à un espace plus grand que les fonctions test de \mathcal{D}' .

6.2 Définition de l'espace \mathcal{S} des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Une fonction ϕ est une fonction à décroissance rapide si elle possède les deux propriétés suivantes :

1. ϕ est une fonction indéfiniment dérivable.
2. $\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^m \phi^{(n)} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

Le lecteur se persuadera rapidement que les fonctions $\exp(-|x|)$ et $\exp(-x^2)$ sont bien des fonctions de \mathcal{S} .

6.3 Définition des distributions tempérées

On appelle distribution tempérée sur \mathbb{R} , une forme linéaire et continue sur \mathcal{S} . L'ensemble des distributions tempérées est notée \mathcal{S}' .

6.4 Définition des fonctions à croissance lente à l'infini

Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est dite à croissance lente à l'infini s'il existe un entier m et un réel positif A tels que, lorsque $|x| \rightarrow +\infty$:

$$|f| \leq A |x|^m. \tag{6.3}$$

À une telle fonction, on peut lui associer une distribution tempérée car pour toute fonction ϕ élément de \mathcal{S} , $f\phi$ est sommable.

6.5 Dérivée d'une distribution tempérée

La définition est identique à celle des distribution de \mathcal{D}' , à savoir :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle T', \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} - \langle T, \phi' \rangle \quad (6.4)$$

6.6 Transformation de Fourier d'une distribution tempérée

Si T est une distribution de \mathcal{S}' , on appelle Transformée de Fourier de T (notée $\mathcal{F}(T)$ ou \widehat{T}), la forme définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle \widehat{T}, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \langle T, \widehat{\phi} \rangle \quad (6.5)$$

6.7 Transformation inverse de Fourier dans \mathcal{S}'

Pour toute distribution de \mathcal{S}' , on a l'égalité : $\mathcal{F}_+(\mathcal{F}_-(T)) = \mathcal{F}_-(\mathcal{F}_+(T)) = T$. On a donc $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_-^{-1}$. En effet, on a, pour toute fonction test ϕ :

$$\langle \mathcal{F}_-(\mathcal{F}_+(T)), \phi \rangle = \langle \mathcal{F}_+(T), \mathcal{F}_-(\phi) \rangle = \langle T, \mathcal{F}_+(\mathcal{F}_-(\phi)) \rangle = \langle T, \phi \rangle \quad (6.6)$$

6.8 Propriétés de la Transformation de Fourier des distributions tempérées

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser les résultats obtenus dans le chapitre dévolu à la transformée de Fourier des fonctions sommables.

6.8.1 Dérivée de la transformée de Fourier d'une distribution.

Pour toute fonction test ϕ de \mathcal{S} , on a successivement :

$$\left\langle \frac{d}{d\nu} \widehat{T}, \phi \right\rangle = - \left\langle \widehat{T}, \frac{d}{d\nu} \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{d\widehat{\phi}}{d\nu} \right\rangle \quad (6.7)$$

Or, on a vu que $\frac{d\widehat{\phi}}{d\nu} = 2i\pi x \widehat{\phi}$. De cette égalité, nous tirons :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{d\nu} \widehat{T}, \phi \right\rangle &= - \left\langle T, 2i\pi x \widehat{\phi} \right\rangle \\ &= \left\langle -2i\pi x T, \widehat{\phi} \right\rangle \\ &= \left\langle -2i\pi x \widehat{T}, \phi \right\rangle \end{aligned} \quad (6.8)$$

Nous concluons par l'égalité entre distributions :

$$\frac{d}{d\nu} \widehat{T} = -2i\pi x \widehat{T} \quad (6.9)$$

6.8.2 Transformée de Fourier de la dérivée d'une distribution.

Par les mêmes techniques que celles utilisées ci-dessus, on trouverait (cf. T.D.) l'égalité suivante :

$$\widehat{\frac{dT}{dx}} = 2i\pi\nu\widehat{T} \quad (6.10)$$

6.8.3 Translation de la transformée de Fourier d'une distribution

$$\widehat{T}(\nu - a) = e^{2i\nu a}\widehat{T}(\nu) \quad (6.11)$$

6.8.4 Transformée de Fourier de la translation d'une distribution

$$\widehat{T(x - a)}(\nu) = e^{-2i\nu a}\widehat{T}(x)(\nu) \quad (6.12)$$

6.9 Exemples de Transformées de Fourier dans \mathcal{S}'

6.9.1 Transformation de Fourier de δ

On vérifie facilement que δ est bien une distribution tempérée. Pour toute fonction test ϕ de \mathcal{S} , on a successivement :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta}, \phi \rangle &= \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle \\ &= \widehat{\phi}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \Big|_{\nu=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}}(x) \phi(x) dx \\ &= \langle \chi_{\mathbb{R}}, \phi \rangle \end{aligned} \quad (6.13)$$

On a ainsi l'égalité très importante suivante :

$$\widehat{\delta} = \chi_{\mathbb{R}} \quad (6.14)$$

que l'on voit écrit souvent de la manière suivante :

$$\widehat{\delta} \equiv 1 . \quad (6.15)$$

6.9.2 Transformation de Fourier de δ'

Le calcul de la Transformée de Fourier de δ' n'est qu'une formalité, on a en effet : $\widehat{\delta'} = 2i\pi\nu\widehat{\delta} = 2i\pi\nu$

6.9.3 Transformation de Fourier de $\exp(2i\pi ax)$

Soit $\Psi_a(x) = \exp(2i\pi ax)$, cherchons sa transformée de Fourier. On a successivement :

$$\begin{aligned}
 \langle \widehat{\Psi}_a, \phi \rangle &= \langle \Psi_a, \widehat{\phi} \rangle \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\nu) e^{2i\pi\nu a} d\nu \\
 &= \mathfrak{F}_+ \left(\widehat{\phi} \right) (a) \\
 &= \mathfrak{F}_+ \left(\mathfrak{F}_- (\phi) \right) (a) \\
 &= \phi(a) \\
 &= \langle \delta_a, \phi \rangle
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

On a donc l'égalité suivante :

$$\widehat{\Psi}_a = \delta_a \tag{6.17}$$

Corollaire 6.9.1 *Ayant l'égalité, $\Psi_0(x) = \chi_{\mathbb{R}}(x)$, on en déduit : $\widehat{\chi}_{\mathbb{R}} = \delta$.*

6.9.4 Transformation de Fourier de la fonction $\operatorname{sgn}(x)$

Il est clair que la distribution sgn est une distribution tempérée pour laquelle on a l'égalité : $\operatorname{sgn}'(x) = 2\delta$. Il s'ensuit que $\widehat{\operatorname{sgn}'} = 2\widehat{\delta}$. Grâce à l'égalité (6.10 p.54), on obtient :

$$2i\pi\nu\widehat{\operatorname{sgn}} = 2\chi_{\mathbb{R}}, \tag{6.18}$$

i.e.

$$\nu\widehat{\operatorname{sgn}} = \frac{1}{i\pi}\chi_{\mathbb{R}} \tag{6.19}$$

Or, nous avons l'égalité :

$$\nu \operatorname{Vp} \left(\frac{1}{\nu} \right) = \chi_{\mathbb{R}} \tag{6.20}$$

En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned}
 \langle \nu \operatorname{Vp} \left(\frac{1}{\nu} \right), \phi \rangle &= \langle \operatorname{Vp} \left(\frac{1}{\nu} \right), \nu\phi \rangle \\
 &= \operatorname{Vp} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\nu\phi}{\nu} d\nu \right\} \\
 &= \operatorname{Vp} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi d\nu \right\} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}} \phi d\nu \\
 &= \langle \chi_{\mathbb{R}}, \phi \rangle
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Nous avons donc une solution particulière de (6.19), Il nous reste à chercher la solution générale de l'équation avec second membre nul :

$$\nu T = 0 \tag{6.22}$$

Or, on peut montrer que la solution générale de (6.22) est $T = c\delta$, où c est un complexe quelconque. La distribution $\widehat{\operatorname{sgn}}$ est la somme d'une solution particulière de (6.19) et de la solution générale de l'équation dite homogène (6.22), soit :

$$\widehat{\operatorname{sgn}} = \frac{1}{i\pi} \operatorname{Vp} \left(\frac{1}{\nu} \right) + c\delta \tag{6.23}$$

Mais la distribution sgn est impaire (et par suite sa transformée de Fourier) de même que la distribution $\operatorname{Vp} \left(\frac{1}{\nu} \right)$. Par ailleurs, la distribution δ est paire ce qui nous conduit à $c = 0$. On a donc le résultat suivant :

$$\widehat{\operatorname{sgn}} = \frac{1}{i\pi} \operatorname{Vp} \left(\frac{1}{\nu} \right) \tag{6.24}$$

6.9.5 Transformation de Fourier de la fonction de Heaviside $\mathbf{H}(x)$.

Partant de l'égalité $\mathbf{H}(x) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(x) + \chi_{\mathbb{R}}(x))$, on obtient immédiatement l'égalité :

$$\hat{\mathbf{H}}(\nu) = \frac{1}{2i\pi} \text{V.P.} \left(\frac{1}{\nu} \right) + \frac{1}{2} \delta \quad (6.25)$$

Bibliographie

- [1] R. Petit. *DEUG et Math.* Masson, Paris, 1996.
- [2] N. Brouillet Y. Noirot, J. P. Parisot. *Cours de Physique, Mathématiques pour la Physique.* Dunod, Paris, 1997.
- [3] P. Benoist-Gueutal and M. Courbage. *Mathématiques pour la Physique, Tome I, II & III.* Eyrolles, Paris, 1992.
- [4] R. Petit. *L'outil mathématique pour la Physique.* Dunod, Paris, 5^{ème} édition edition, 1998.
- [5] M. Hulin, N. Hulin, and D. Perrin. *Équations de Maxwell, Ondes électromagnétiques.* Dunod, Paris, 1993.
- [6] Garing. *Milieux diélectriques.* Ellipses, Paris, 1995.
- [7] R. Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique.* Masson, Paris, 1992.
- [8] Straton. *Théorie de l'électromagnétisme.* Dunod, Paris, 1961.
- [9] R. Feynman. *Le cours de Physique Électromagnétisme I & II.* InterEditions, Paris, 1979.
- [10] B. Latour. *Agrégation de Physique, Leçon d'électromagnétisme.* Ellipses, Paris, 1999.
- [11] J. P. Pérez, R. Carles, and R. Fleckinger. *Électromagnétisme, Fondements et applications.* Dunod, Paris, 2002.
- [12] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* John Wiley & Sons, INC, New York, third edition edition, 1999.
- [13] G. Scharf. *From Electrostatics to Optics.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
- [14] Jin Au Kong. *Electromagnetic Wave Theory.* EMW Publishing, Cambridge, Massachusetts, USA, 2000.
- [15] Jones. *The theory of electromagnetism.* Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1964.