

Techniques mathématiques pour la Physique et la Chimie

Frédéric Zolla et Kamal Belkebir

26 octobre 2009

Table des matières

1	Rappels sur les vecteurs	3
1.1	Introduction	3
1.2	Quelques définitions nécessaires	4
1.3	Opérations sur les vecteurs	4
1.3.1	Addition de vecteurs	4
1.3.2	Multiplication d'un vecteur par un scalaire	5
1.4	Coordonnées cartésiennes d'un vecteur	5
1.4.1	Repère	5
1.4.2	Orientation de l'espace	6
1.4.3	Coordonnées d'un vecteur dans un repère	6
1.5	Produit scalaire	7
1.5.1	Définition	7
1.5.2	Propriétés	7
1.6	Le produit vectoriel	7
1.6.1	Définition	7
1.6.2	Propriétés	8
1.7	Produit mixte	8
2	Rappels sur les matrices	11
2.1	Propos liminaires	11
2.2	Quelques exemples de matrices	12
2.3	Opérations sur les matrices	13
2.3.1	Addition	13
2.3.2	Multiplication	14
2.3.3	Propriétés (<i>et "non-propriétés"</i>) de la multiplication des matrices	15
2.4	Notions sur les matrices inversibles	15
2.4.1	Déterminant d'une matrice	15
2.5	Notions de vecteur propre et de valeur propre	16
3	Calcul différentiel	17
3.1	Fonctions de plusieurs variables réelles	17
3.1.1	Fonction de plusieurs variables réelles	17
3.1.2	Limite d'une fonction	18
3.1.3	Fonctions continues	18
3.1.4	Dérivées partielles premières	18
3.1.5	Dérivées partielles secondes	19
3.1.6	Théorème de Schwarz	20
3.1.7	Fonctions linéaires de plusieurs variables	20
3.2	Différentielle d'une fonction	21
3.2.1	Différentielle d'une fonction d'une variable	21
3.2.2	Dérivation des fonctions composées	21

3.2.3	Remarque sur le caractère intrinsèque de la différentielle d'une fonction	21
3.2.4	Définition et introduction à l'opérateur gradient	22
3.2.5	Propriétés	22
3.2.6	Dérivation des fonctions composées de plusieurs variables— Règle de la chaîne	23
3.2.7	Exemples d'utilisation de la règle de la chaîne	23
3.3	Formes différentielles	25
3.3.1	Définitions	25
3.3.2	Conditions nécessaires de totale différentiabilité	26
3.4	Application aux calculs des incertitudes	27
3.4.1	Problématique	27
3.4.2	Incertainces et différentielles	28
4	Équations différentielles ordinaires	29
4.1	Définitions	29
4.2	Solutions d'une équation différentielle ordinaire	30
4.2.1	Remarques générales	30
4.2.2	Fonctions usuelles	30
4.2.3	Familles de solutions, conditions initiales et conditions aux limites	30
4.3	Exemples de solution d'équations différentielles	30
4.3.1	Équations différentielles du premier ordre	30
4.3.2	Équations différentielles du second ordre	32
5	Calcul intégral	37
5.1	Introduction	37
5.2	Primitive et intégrale indéfinie	37
5.2.1	Quelques primitives élémentaires	39
5.2.2	Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie	40
5.2.3	Intégration par changement de variable	40
5.2.4	Intégration par parties	41
5.3	Intégrale définie : intégrale de Riemann	41
5.3.1	Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann	43
5.3.2	Formule de Newton-Leibniz	44
5.3.3	Changement de variable	45
5.3.4	Intégration par parties	45
5.4	Extension de la notion d'intégrale	46
5.4.1	Intégrales avec les bornes infinies	46
5.4.2	Intégrale d'une fonction discontinue	47
5.5	Intégrale multiple	48
5.5.1	Intégrale double	48
5.5.2	Calcul des intégrales doubles	49
5.5.3	Applications des intégrales doubles au calcul des volumes	50
5.5.4	Applications des intégrales doubles au calcul des aires	50
5.5.5	Changement de variables	51
6	Séries de Fourier	53
6.1	Préambule	53
6.2	Polynômes trigonométriques	54
6.2.1	Fonction périodique	54
6.2.2	Fonction exponentielle complexe	54
6.2.3	Fonction trigonométrique	55
6.2.4	Représentation en Sinus et Cosinus	55

6.2.5	Propriété d'orthogonalité	56
6.2.6	Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques	56
6.2.7	Égalité de Parseval	57
6.3	Séries de Fourier	57
6.3.1	Le cadre de l'espace $L^p_{\sharp}([0, T])$	58
6.3.2	Théorème fondamental	58
6.3.3	Approximation dans $L^2_{\sharp}([0, T])$	58
6.3.4	Théorème de Dirichlet	59
6.3.5	Quelques exemples de séries de Fourier	59
6.3.6	Analyse spectrale – Coefficients de Fourier	59
6.4	Un exemple d'utilisation	60
6.4.1	La corde vibrante fixée entre deux points : généralités	60
6.4.2	Cas de la corde pincée	63
6.4.3	Cas de la corde frappée	63
6.4.4	Comparaison entre les cordes pincées et les cordes frappées	64
7	Transf. de Fourier des fonctions ...	67
7.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$	67
7.2	Définition de la transformée de Fourier d'une fonction sommable	68
7.3	Transformée de Fourier inverse	68
7.4	Exemples de transformée de Fourier	68
7.4.1	Transformée de Fourier la fonction porte Π	68
7.4.2	Transformée de Fourier de la fonction gaussienne	69
7.4.3	Transformée de Fourier de la fonction $\exp(- x)$	69
7.5	Quelques propriétés des transformées de Fourier	70
7.5.1	Linéarité de la Transformée de Fourier	70
7.5.2	Transformée de Fourier des fonctions réelles	70
7.5.3	Changement d'échelle	70
7.5.4	Parité	71
7.5.5	Translation	71
7.5.6	Modulation	71
7.5.7	Dérivation	71
7.5.8	Théorème de Parseval-Plancherel	71
7.6	Transformation de Fourier bidimensionnelle	72
7.6.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$	72
7.6.2	Définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction sommable	72
7.6.3	Transformée de Fourier d'une fonction radiale	72
8	Introduction à l'Analyse vectorielle	75
8.1	Propos liminaires	75
8.1.1	Introduction	75
8.1.2	Remarque sur les notations	76
8.2	Flux d'un champ de vecteurs	76
8.3	Théorème de Green-Ostrogradsky	76
8.3.1	Énoncé	76
8.3.2	Le théorème du gradient	76
8.4	Propriétés de l'opérateur divergence	77
8.4.1	Caractère intrinsèque de l'opérateur divergence	77
8.4.2	Linéarité de l'opérateur divergence	77
8.4.3	En vrac	77
8.5	Champ à flux conservatif	77
8.6	Le théorème de Stokes	78
8.6.1	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe	78

8.6.2	Énoncé du théorème de Stokes	78
8.7	Propriétés de l'opérateur rotationnel	78
8.7.1	Caractère intrinsèque de l'opérateur rotationnel	78
8.7.2	Linéarité de l'opérateur rotationnel	78
8.7.3	En vrac	78
8.8	Opérateurs différentiels du second ordre	79

Table des figures

1.1	Addition de deux vecteurs	4
1.2	Volume définie par trois vecteurs non coplanaires	9
2.1	Le vecteur \vec{v} est obtenu par la multiplication de la matrice de rotation M_θ par le vecteur \vec{u}	13
5.1	“Découpage” d’un intervalle en sous-intervalles.	41
6.1	Interprétation géométrique	59
6.2	Corde vibrante : flash à l’instant t	61
6.3	Graphe des fonctions f et \tilde{f} ($0 < \alpha < 1$).	62
6.4	Graphe des fonctions g et \tilde{g} ($0 < \alpha < 1, 0 < \delta < \min(2\alpha, 2(1 - \alpha))$).	63
7.1	La fonction porte Π	69
7.2	Passage aux coordonnées polaires dans l’espace direct et dans l’espace de Fourier.	72

Avis au lecteur

Quelques conseils pour bien aborder ce cours ...

Ce fascicule s'adresse aux étudiants inscrits en troisième année de Licence, mention Physique et Chimie de l'Université de Provence. Il a pour vocation d'être un support écrit qui permet d'éviter à l'étudiant d'accomplir la tâche souvent fastidieuse de « prendre le cours ». Cela n'empêche pas, toutefois, de prendre des notes pour compléter ledit fascicule. Son esprit ainsi libéré de ce fardeau, il pourra se concentrer davantage sur ce qui se dit pendant le cours et se consacrer à la nécessaire réflexion que présuppose un cours de Licence. Ce cours n'a, en revanche, pas vocation à se suffire à lui-même. L'étudiant devra faire son chemin de Damas en lisant des ouvrages et en faisant de nombreux exercices, exercices sans lesquels toute véritable et durable assimilation est vaine. Afin de vous aider dans cette démarche, il vous est proposé une liste non exhaustive d'ouvrages¹.

– Liste de livres sur les Mathématiques pour la Physique

1. [1, DEUG ET MATH](Niveau DEUG, pour une remise à niveau)
2. [2, COURS DE PHYSIQUE, MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE](Niveau DEUG)
3. [3, MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE, *Tomes I, II & III*](Niveau Licence)
4. [4, OUTIL MATHÉMATIQUE POUR LA PHYSIQUE] (Niveau Licence)
5. [5, *Dictionnaire des Mathématiques*] (À consulter pour les définitions ...)
6. [6, PRÉCIS DE MATHÉMATIQUES, *Tomes I à V*](Niveau Licence de Mathématiques. Destinés à ceux qui sont épris de rigueur mathématique.)
7. [7, MATHÉMATIQUES POUR LA PHYSIQUE ET LES PHYSICIENS](Niveau Licence et au delà. Très bon ouvrage destiné à ceux qui veulent en savoir (beaucoup) plus.)

¹Voir page Bibliographie pour références complètes

Chapitre 1

Rappels sur les vecteurs

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Quelques définitions nécessaires	4
1.3	Opérations sur les vecteurs	4
1.3.1	Addition de vecteurs	4
1.3.2	Multiplication d'un vecteur par un scalaire	5
1.4	Coordonnées cartésiennes d'un vecteur	5
1.4.1	Repère	5
1.4.2	Orientation de l'espace	6
1.4.3	Coordonnées d'un vecteur dans un repère	6
1.5	Produit scalaire	7
1.5.1	Définition	7
1.5.2	Propriétés	7
1.6	Le produit vectoriel	7
1.6.1	Définition	7
1.6.2	Propriétés	8
1.7	Produit mixte	8

1.1 Introduction

La notion de vecteurs est une notion centrale en Physique et en Mathématiques : cette notion a permis au cours de l'Histoire des sciences de rapprocher les points de vue géométriques et algébriques et a sans aucun doute contribué de manière décisive à l'essor de la Mécanique et subséquemment de la compréhension du mouvement des planètes qui fut un des premiers grands succès de la Physique. Il va sans dire que l'ambition de ce cours étant uniquement de rappeler les notions les plus utiles ayant trait aux vecteurs aux l'étudiant de troisième année de Licence mention Physique et Chimie, on se gardera bien de détailler les concepts et les notions abstraites pourtant nécessaires à une élaboration saine de tout savoir scientifique. Les étudiants qui désirent approfondir leurs connaissances liront avec profit les ouvrages suivants [6].

La notion de vecteur peut être abordée de deux manières différentes, soit de «manière algébrique» soit de «manière géométrique». La première manière qui est la plus abstraite est aussi la plus féconde mais n'est généralement pas nécessaire à ce niveau¹. Cette façon de procéder nécessite l'introduction des espaces vectoriels, espaces que l'on affuble de propriétés très générales comme l'addition interne la

¹On évoquera, malgré tout, cet aspect lorsqu'on étudiera par exemple les séries de Fourier.

multiplication par un scalaire, etc. . . Mais comme on vient de le dire on se contentera si l'on peut dire de l'approche géométrique qui est sans doute l'approche la plus intuitive. Pour cela, il est quand même nécessaire d'introduire des définitions précises.

1.2 Quelques définitions nécessaires

Définition 1.2.1 (Bipoint) *Un bipoint est un couple de points ordonnés. Ainsi un «bipoint AB » noté (A, B) est-il différent du «bipoint BA » noté (B, A) . Le premier point du bipoint est appelé origine du bipoint.*

Définition 1.2.2 (Équipollence) *Deux bipoints (A, B) et (C, D) sont dits équipollents lorsque les bipoints (A, D) et (B, C) ont même milieu. La classe d'équivalence d'un bipoint (A, B) est appelé «vecteur AB » et est notée \overrightarrow{AB} .*

Ainsi si (A, B) et (C, D) sont équipollents ils «décrivent» le même vecteur : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. On a alors trivialement $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Un vecteur peut être simplement représenté par une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Cette dernière égalité signifie qu'il peut être représentée –de manière non unique– par le bipoint (A, B) .

On dit que deux vecteurs sont opposés si l'un d'eux ayant comme représentant le vecteur \overrightarrow{AB} , l'autre a comme représentant le vecteur \overrightarrow{BA} .

Définition 1.2.3 (Colinéarité) *On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, s'il existe deux bipoints les représentant qui soient portés par la même droite.*

Définition 1.2.4 (Norme) *Si un vecteur \vec{v} est tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, on définit la norme du vecteur \vec{v} comme étant la longueur du segment $[A, B]$. Les vecteurs de norme 1, sont des vecteurs unitaires.*

▷ Physique

En cinématique, la vitesse instantanée d'un point matériel est représentée par un vecteur, souvent noté \vec{v} . En électrostatique ou en magnétostatique, en un point donné, les champs électrique et magnétique sont souvent représentés par des vecteurs, notés, respectivement \vec{E} et \vec{B} . En mécanique, la force est représentée par un vecteur. . .

1.3 Opérations sur les vecteurs

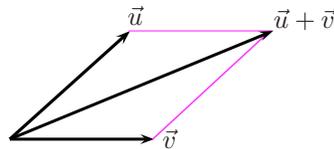


FIG. 1.1 – Addition de deux vecteurs

1.3.1 Addition de vecteurs

Définition 1.3.1 (Addition de deux vecteurs) *La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , notée $\vec{u} + \vec{v}$, est un vecteur construit selon la règle du parallélogramme. (cf. Fig. 1.1)*

Propriétés

1. Commutativité de l'addition

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

2. Associativité de l'addition

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. On pourra alors se passer de parenthèses : les deux dernières expressions seront alors notées simplement $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

3. Élément neutre (vecteur nul)

Il existe un élément neutre noté $\vec{0}$ tel que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

4. Vecteur opposé

L'opposé du vecteur \vec{v} , noté $-\vec{v}$, est le vecteur qui vérifie les égalités $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$. On notera $\vec{u} - \vec{v}$ en lieu et place de $\vec{u} + (-\vec{v})$.

5. Relation de Chasles

Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} représentent les vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} respectivement et sont liés par la relation $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, on a alors aussi $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$. Mais \vec{OB} et \vec{AC} sont les représentants de bipoints équipollents ; ces deux vecteurs sont donc égaux $\vec{OB} = \vec{AC}$. On est donc conduit à l'égalité :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}, \quad (1.1)$$

qui est connue sous le nom de relation de Chasles.

1.3.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition 1.3.2 Si le vecteur \vec{v} a comme représentant le vecteur \vec{OA} , on appelle «produit du vecteur \vec{v} par le scalaire non nul λ », le vecteur \vec{w} , noté $\lambda \vec{v}$, représenté par le vecteur \vec{OB} ayant les propriétés suivantes :

1. \vec{OA} et \vec{OB} sont colinéaires
2. \vec{OA} et \vec{OB} sont de même sens si λ est positif et de sens opposés si λ est négatif.
3. Les normes de \vec{OA} et \vec{OB} vérifient : $\|\vec{OB}\| = |\lambda| \|\vec{OA}\|$.

Remarque 1.3.3 On étend sans difficulté la définition précédente au cas où le scalaire est nul. On a alors dans ce cas : $0 \vec{v} = \vec{0}$.

Propriétés

1. Distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$(\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u}.$$

2. Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs

$$\lambda (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}.$$

3. Associativité

$$(\lambda \mu) \vec{v} = \lambda (\mu \vec{v})$$

4. Élément neutre (scalaire neutre)

$$1 \vec{v} = \vec{v}.$$

1.4 Coordonnées cartésiennes d'un vecteur

1.4.1 Repère

On a vu lors des paragraphes précédents que la notion de vecteur était reliée à la notion de classe d'équivalence de bipoints ; le vecteur est donc en quelque

sorte une grandeur délocalisée. Si l'on veut privilégier un point origine parmi tous les points origine des bipoints équipollents, il faut en faire mention explicitement. Pour cela, on introduit la notion de repère ou repère cartésien. Un repère est un ensemble de deux objets mathématiques formé par un point O de l'espace choisi arbitrairement et un ensemble de vecteurs non coplanaires. Ainsi, dans l'espace on notera un repère \mathcal{R} , par le quadruplet suivant $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et dans le plan, par le triplet, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Le repère est dit orthogonal si les vecteurs sont deux à deux perpendiculaires.

Remarque 1.4.1 *Il est important de préciser que les triplets et quadruplets sont ordonnés ; ainsi $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ n'a-t-il pas la même signification que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$.*

1.4.2 Orientation de l'espace

Le cas bidimensionnel

Dans le plan, un sens conventionnel est choisi ; le sens positif est celui du sens trigonométrique, i.e. le sens inverse d'une aiguille d'une montre.

Le cas tridimensionnel

Dans l'espace tridimensionnel, le trièdre $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est considéré comme direct si ayant considéré les deux premiers vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 de manière arbitraire, on construit le troisième vecteur \vec{e}_3 de sorte que les trois vecteurs vérifient l'ordonnement des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur).

1.4.3 Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Soit un vecteur \vec{v} et un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on appelle coordonnées du vecteur \vec{v} les coordonnées du point M , (x_1, x_2, x_3) , telles que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. On écrit alors

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (1.2)$$

Propriétés

Soit deux vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , trois vecteurs de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) , (z_1, z_2, z_3) on a les propriétés suivantes

1. La définition de la norme et celle des coordonnées rappelée ci-dessus montre que l'on a un lien entre la norme du vecteur \vec{v} et les coordonnées associées :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

2. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$ et $x_3 = y_3$.
3. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2$ et $z_3 = x_3 + y_3$.
4. $\vec{v} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2$ et $y_3 = \lambda x_3$.

Remarque 1.4.2 *On peut étendre la notion de vecteur à des dimensions supérieures à trois. Dans ce cas, le vecteur \vec{v} peut s'exprimer de la manière suivante :*

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \quad (1.3)$$

où n représente la dimension (éventuellement infinie) de l'espace. Par ailleurs, on peut aussi étendre la notion de vecteurs au cas où les x_i sont des nombres complexes. Ainsi, lorsque les x_i sont réels (resp. complexes), on parle de vecteurs de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n).

1.5 Produit scalaire

1.5.1 Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques de \mathbb{R}^3 , on appelle produit scalaire de \vec{u} et de \vec{v} que l'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le scalaire suivant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad (1.4)$$

1.5.2 Propriétés

1. Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. Si le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul, les vecteurs sont orthogonaux.
3. $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
4. Si α et β sont deux réels : $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = (\alpha\beta) \vec{u} \cdot \vec{v}$.
5. Le produit scalaire est distributive par rapport à l'addition. Soient trois vecteurs quelconques \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
6. Soit deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Remarque 1.5.1 *La définition même du produit scalaire suggère que ce produit soit invariant lorsque l'on change de base et par conséquent de coordonnées. Ainsi dans une autre base les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} eussent été différentes, mais le «miracle» du produit scalaire fait que le produit scalaire reste insensible à ce changement.*

▷ Physique

En mécanique, on rencontre le produit scalaire dans l'expression de la puissance, lorsque celle-ci est exprimée en fonction de la force et de la vitesse : $P = \vec{f} \cdot \vec{v}$. En électromagnétisme, dans l'expression d'une onde plane : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, où \vec{k} est un vecteur –éventuellement complexe– et \vec{r} le vecteur position.

1.6 Le produit vectoriel

1.6.1 Définition

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^3 , on appelle produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} , que l'on note, $\vec{u} \times \vec{v}$, le vecteur \vec{w} ayant les propriétés suivantes :

1. Sa direction est perpendiculaire au plan vectoriel engendré par \vec{u} et \vec{v}
2. Le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct.
3. La norme de \vec{w} vaut : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Remarque 1.6.1 *Pour définir correctement la propriété 1, il faut que l'on ait affaire à un vrai plan vectoriel. Autrement dit, il faut que ledit plan vectoriel ne soit pas dégénéré en une droite vectorielle, ce qui suppose que les vecteurs ne soient pas colinéaires. On peut, malgré tout, surmonter cette difficulté, en se reportant à la troisième propriété qui montre que lorsque les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires leur norme doit être nulle. Mais, le seul vecteur de norme nulle étant le vecteur nul, on peut se passer des propriétés 1 et 2. On pourra alors enlever cette restriction, en posant que le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires donne le vecteur nul.*

1.6.2 Propriétés

1. Le produit vectoriel est anti-commutatif : $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.
2. Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
3. Le produit vectoriel est associatif par rapport à la multiplication par un scalaire : soit λ , un réel, on a les égalités : $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$.
4. Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si les deux vecteurs colinéaires.
5. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ représente un repère orthonormé direct, on vérifie successivement :
 - (a) $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$
 - (b) $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3$
 - (c) $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$.

On vérifie alors que si l'on considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) , le produit vectoriel de \vec{u} par \vec{v} s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3 \quad (1.5)$$

6. Soit trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a la relation suivante :

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}. \quad (1.6)$$

Cette relation est connue sous le nom de formule du double produit vectoriel.

▷ Physique

En Mécanique, le moment $\vec{\mathcal{M}}$ d'une force \vec{f} est défini comme le produit vectoriel de la force \vec{f} par \vec{AP} vecteur représenté par le bipoint reliant le point d'application A au point pivot P : $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{f}|P} = \vec{f} \times \vec{AP}$. En Électrodynamique, l'expression de la force de Lorentz fait apparaître un produit vectoriel : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

1.7 Produit mixte

Soit trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} quelconques, on appelle produit mixte des trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, le scalaire p tel que :

$$p = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}). \quad (1.7)$$

Propriétés

1. Mesure du volume

La quantité $|p|$ représente le volume du parallélépipède construit à partir des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} . (cf. Fig. 1.2)

2. Permutation circulaire

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

3. Intersion de deux vecteurs

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

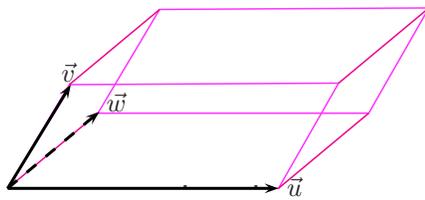


FIG. 1.2 – Volume définie par trois vecteurs non coplanaires

Chapitre 2

Rappels sur les matrices

Sommaire

2.1	Propos liminaires	11
2.2	Quelques exemples de matrices	12
2.3	Opérations sur les matrices	13
2.3.1	Addition	13
2.3.2	Multiplication	14
2.3.3	Propriétés (et “non-propriétés”) de la multiplication des matrices	15
2.4	Notions sur les matrices inversibles	15
2.4.1	Déterminant d’une matrice	15
2.5	Notions de vecteur propre et de valeur propre	16

2.1 Propos liminaires

Il ne s’agit évidemment que d’un rappel succinct de la notion de matrice ; le lecteur ayant envie d’en savoir plus pourra se reporter à [6]. Pour ce faire considérons une application linéaire \mathcal{L} qui à tout vecteur \vec{v} de \mathbb{C}^n fait correspondre un vecteur \vec{v}' de \mathbb{C}^n , que l’on peut noter symboliquement de la manière suivante :

$$\vec{v} \xrightarrow{\mathcal{L}} \vec{v}' = \mathcal{L}(\vec{v}) \quad (2.1)$$

En outre, les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' peuvent se décomposer dans une même base orthonormée \mathcal{B} définie par les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, soit :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{v}' = \sum_{i=1}^n v'_i \vec{e}_i . \quad (2.2)$$

Parmi toutes les applications possibles, il en est une catégorie très utile : les applications linéaires. Autrement dit, cette application a la vertu suivante. *Pour tout couple de complexes λ_1, λ_2 et tout couple de vecteurs de \mathbb{C}^n , \vec{v}_1, \vec{v}_2 , on a l’égalité :*

$$\mathcal{L}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(\vec{v}_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(\vec{v}_2) . \quad (2.3)$$

Si donc l’application \mathcal{L} est linéaire, on doit avoir :

$$\vec{v}' = \mathcal{L}(\vec{v}) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i \mathcal{L}(\vec{e}_i) . \quad (2.4)$$

Mais $\mathcal{L}(\vec{e}_i)$ est un vecteur de \mathbb{C}^n qui se décompose dans la base \mathcal{B} , soit :

$$\mathcal{L}(\vec{e}_j) = \sum_i b_{i,j} \vec{e}_i. \quad (2.5)$$

Ainsi

$$\vec{v}' = \sum_i v_i \left(\sum_j b_{i,j} \vec{e}_j \right) = \sum_j \left(\sum_i b_{j,i} v_i \right) \vec{e}_j. \quad (2.6)$$

On en déduit une relation entre les composantes des vecteurs \vec{v} et \vec{v}' :

$$v'_j = \sum_i b_{j,i} v_i \quad (2.7)$$

Ainsi l'application linéaire \mathcal{L} est-elle entièrement définie par le tableau à n lignes et n colonnes suivant :

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

On dit que B est une matrice carrée $n \times n$ et les nombres $b_{i,j}$ sont les éléments de la matrice B . Les éléments $b_{i,i}$ sont appelés "éléments de la diagonale principale". Et l'on note simplement

$$\vec{v}' = \mathcal{L}(\vec{v}) = B \vec{v}. \quad (2.9)$$

2.2 Quelques exemples de matrices

1. Matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice où seuls les éléments de la diagonale principale sont non nuls, à savoir :

$$b_{i,j} = \delta_{i,j} b'_i, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.10)$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker lequel est défini comme suit :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.11)$$

2. Matrice scalaire

Une matrice est dite scalaire si elle est diagonale et si tous ces éléments sont égaux. Autrement dit

$$b_{i,j} = \delta_{i,j} \lambda, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.12)$$

Dans ce cas $B \vec{u} = \lambda \vec{u}$, pour tout vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^n .

3. Matrice identité

La matrice identité, notée Id_n , est une matrice scalaire pour laquelle le scalaire λ est égale à 1. Et l'on a pour tout vecteur \vec{v} de \mathbb{R}^n , l'égalité $\text{Id}_n \vec{v} = \vec{v}$.

4. Matrice nulle

La matrice nulle est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Notée 0_n , elle est telle que $0_n \vec{v} = 0$, pour tout vecteur \vec{v} de \mathbb{R}^n .

5. Matrice symétrique

Une matrice B est dite symétrique si $b_{i,j} = b_{j,i}$, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$.

6. Matrice antisymétrique

Une matrice B est dite antisymétrique si $b_{i,j} = -b_{j,i}$, pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$. Notez que cela signifie que tous les éléments de la diagonale principale sont nuls.

7. Transposée d'une matrice

Soit A et B deux matrices de \mathbb{R}^n , d'éléments respectifs $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$, on dit que " B est la transposée de A " et l'on note $B = A^t$ si et seulement si pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$:

$$b_{i,j} = a_{j,i}. \quad (2.13)$$

Notez que si une matrice est symétrique elle est sa propre transposée.

8. Matrice de rotation dans le plan

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan (vecteurs de \mathbb{R}^2) et M_θ la matrice 2×2 suivante :

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

alors si $\vec{v} = M_\theta \vec{u}$, le vecteur \vec{v} est le vecteur qui se déduit de \vec{u} par une rotation de ce dernier vecteur d'un angle θ . (cf. Fig. 2.1)

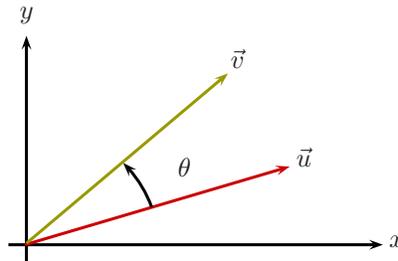


FIG. 2.1 – Le vecteur \vec{v} est obtenu par la multiplication de la matrice de rotation M_θ par le vecteur \vec{u} .

2.3 Opérations sur les matrices

2.3.1 Addition

Considérons quatre vecteurs quelconques de \mathbb{R}^n \vec{u} , \vec{v} , \vec{v}' et \vec{w} ainsi que trois matrices $n \times n$ reliés par les relations

$$\begin{cases} \vec{v} = A \vec{u} \\ \vec{v}' = B \vec{u} \\ \vec{w} = \vec{v} + \vec{v}' = S \vec{u} \end{cases} \quad (2.15)$$

On dit que la matrice S est la somme des matrices A et B , et l'on note : $S = A + B$. Enfin, la relation 2.3 implique que les éléments $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $s_{i,j}$ des matrices A , B et S sont sommés élément par élément :

$$s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \quad (2.16)$$

Cette propriété de l'addition des matrices implique que l'addition des matrices est associative et commutative.

1. **Commutativité de l'addition des matrices :**

Soit A et B deux matrices $n \times n$, on a :

$$A + B = B + A . \quad (2.17)$$

2. **Associativité de l'addition des matrices :**

Soit A , B et C trois matrices $n \times n$, on a :

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C . \quad (2.18)$$

3. **Opposée d'une matrice** L'opposée d'une matrice A est notée $-A$. Elle est telle que $A + (-A) = (-A) + A = 0_n$.

2.3.2 Multiplication

On considère trois vecteurs de \mathbb{R}^n \vec{v} , \vec{v}' et \vec{v}'' liés par deux applications linéaires \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B :

$$\vec{v}' = \mathcal{L}_B(\vec{v}) \quad (2.19)$$

et

$$\vec{v}'' = \mathcal{L}_A(\vec{v}') \quad (2.20)$$

D'après le paragraphe précédent, il existe alors des matrices carrées $n \times n$, que l'on appelle A et B telles que :

$$\vec{v}' = B \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}'' = A \vec{v}' \quad (2.21)$$

On doit donc avoir

$$\vec{v}'' = A(B \vec{v}) \quad (2.22)$$

La composition de deux applications linéaires étant elle-même linéaire, on doit avoir une application linéaire que l'on appelle \mathcal{L}_P pour la circonstance qui lie "directement" \vec{v}'' à \vec{v} , soit :

$$\vec{v}'' = \mathcal{L}_A(\mathcal{L}_B(\vec{v})) = (\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B)(\vec{v}) = \mathcal{L}_P(\vec{v}) . \quad (2.23)$$

Mais de nouveau, il existe une matrice P qui par définition est la matrice produit de A par B et l'on note $P = AB$ telle que

$$\vec{v}'' = \mathcal{L}_P(\vec{v}) = P \vec{v} . \quad (2.24)$$

La question qui reste maintenant en suspens, c'est de lier les éléments $p_{i,j}$ de la matrice P aux éléments $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des deux matrices A et B . or il s'avère, comme nous l'allons voir tout à l'heure, que **l'on n'a pas la relation $p_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j}$** . On a, en effet (cf. Eqs. 2.4, 2.5)

$$\vec{v}' = \sum_k v'_k \vec{e}_k \quad (2.25)$$

avec $v'_k = \sum_i b_{k,i} v_i$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \vec{v}'' &= \mathcal{L}_A(\vec{v}') \\ &= \mathcal{L}_A\left(\sum_k v'_k \vec{e}_k\right) \\ &= \sum_k v'_k \mathcal{L}_A(\vec{e}_k) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Or $\mathcal{L}_A(\vec{e}_k) = \sum_l a_{l,k} \vec{e}_l$, ce qui compte tenu de ce qui est écrit ci-dessus, conduit à :

$$\begin{aligned} \vec{v}'' &= \sum_k \overbrace{\left(\sum_i b_{k,i} v_i\right)}^{v'_k} \overbrace{\left(\sum_l a_{l,k} \vec{e}_l\right)}^{\mathcal{L}_A(\vec{e}_k)} \\ &= \sum_l \sum_i \underbrace{\left(\sum_k a_{l,k} b_{k,i}\right)}_{p_{l,i}} v_i \vec{e}_l \end{aligned} \quad (2.27)$$

On a donc la relation suivante qu'il faut retenir :

$$p_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j} . \quad (2.28)$$

Ainsi le calcul d'un seul élément de la matrice p "mobilise-t-il" une ligne de la matrice A et une colonne de la matrice B . Ceci a des conséquences remarquables sur les propriétés des matrices vis-à-vis de la multiplication. En autres, cette multiplication n'est pas commutative!!

2.3.3 Propriétés (et "non-propriétés") de la multiplication des matrices

Propriétés en commun avec la multiplication des scalaires

1. Associativité

La multiplication des matrices est associative. Soit trois matrices carrées $n \times n$ A , B et C , on alors : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

2. Multiplication par la matrice nulle 0_n . Soit A , une matrice quelconque $n \times n$, on a $0_n A = 0_n$.

"Non-propriétés" de la multiplication matricielle

1. La multiplication est, en général, non commutative

Pour cela, il suffit de prendre un contre-exemple. Considérons les matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

2. Dans l'ensemble des matrices, il existe des diviseurs de zéro¹.

Pour cela, il suffit de considérer les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

et de constater que $AB = BA = 0_2$. Cela a une conséquence fâcheuse, c'est qu'*a priori*, si l'on a trois matrices A , B et C telles que $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A et en déduire que $B = C$. Néanmoins, dans le paragraphe suivant on va voir quelles conditions il faut exiger de la matrice A pour que l'on puisse procéder à une pareille simplification.

2.4 Notions sur les matrices inversibles

2.4.1 Déterminant d'une matrice

Il n'est pas ici question de donner une définition générale du déterminant ainsi qu'un catalogue complet de ses propriétés. Le lecteur qui souhaite approfondir ses connaissances sur ce sujet se reportera à des ouvrages comme [6]. Dans ce paragraphe, on se contentera de donner des indications qui devraient être suffisantes

¹En général, on dit qu'un élément $x \neq 0$ est un diviseur de zéro à gauche (resp. à droite), s'il existe un élément $y \neq 0$ tel que $xy = 0$ (resp. $yx = 0$).

pour résoudre les problèmes de Physique et de Chimie que l'étudiant sera amené à rencontrer lors de la troisième année de Licence. À toute matrice A on lui associe un scalaire, noté $\det(A)$. Ce scalaire s'exprime en fonction des éléments de la matrice $\{a_{i,j}\}$. Cette expression est donnée sans autre forme de procès dans le cas où la matrice est une matrice 2×2 et dans le cas où la matrice est une matrice 3×3 .

1. Matrice 2×2

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2} . \quad (2.32)$$

2. Matrice 3×3

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} \\ &- a_{3,2} a_{2,3} a_{1,1} - a_{3,3} a_{2,1} a_{1,2} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Propriétés du déterminant

1. $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$
2. Si $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible. Autrement dit, il existe une matrice notée A^{-1} telle que $A^{-1}A = AA^{-1} = \text{Id}_n$. L'existence de cet inverse a évidemment de nombreuses implications. Ainsi, considérons une matrice A et deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , (A et \vec{v} étant supposés connus) tels que :

$$A \vec{u} = \vec{v} . \quad (2.34)$$

Le vecteur \vec{u} se déduit de A^{-1} et \vec{v} , $\vec{u} = A^{-1} \vec{v}$.

2.5 Notions de vecteur propre et de valeur propre

Au paragraphe 2.2, on a vu que pour certaines matrices, appelées matrices scalaires, le vecteur $B \vec{v}$ restait colinéaires au vecteur \vec{v} et, ce, **pour tout vecteur \vec{v} de \mathbb{R}^n** . Dans ce paragraphe, on voudrait savoir si, pour une matrice B quelconque, **il existe** des couples (λ, \vec{v}) formés par un scalaire particulier λ et un vecteur particulier non nul tels que $B \vec{v} = \lambda \vec{v}$. Le vecteur \vec{v} est appelé "vecteur propre" et le scalaire λ est appelé valeur propre. L'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_i\}$ de B est appelé spectre de B et est noté $\sigma(P)$. Si λ est valeur propre, on doit avoir $(B - \lambda \text{Id}_n) \vec{v} = \vec{0}$, ce qui montre que la matrice $B - \lambda \text{Id}_n$ est non inversible². On doit donc avoir $\det(B - \lambda \text{Id}_n) = 0$. Cette dernière égalité s'écrit comme un polynôme de degré n en λ dont les coefficients s'expriment en fonction des coefficients $\{b_{i,j}\}$ de la matrice B . Ce polynôme s'appelle "le polynôme caractéristique de la matrice B ".

²Si tel n'était pas le cas, on aurait $\vec{v} = (B - \lambda \text{Id}_n)^{-1} \vec{0} = \vec{0}$, ce qui est exclu pas hypothèse.

Chapitre 3

Calcul différentiel

Sommaire

3.1 Fonctions de plusieurs variables réelles	17
3.1.1 Fonction de plusieurs variables réelles	17
3.1.2 Limite d'une fonction	18
3.1.3 Fonctions continues	18
3.1.4 Dérivées partielles premières	18
3.1.5 Dérivées partielles secondes	19
3.1.6 Théorème de Schwarz	20
3.1.7 Fonctions linéaires de plusieurs variables	20
3.2 Différentielle d'une fonction	21
3.2.1 Différentielle d'une fonction d'une variable	21
3.2.2 Dérivation des fonctions composées	21
3.2.3 Remarque sur le caractère intrinsèque de la différentielle d'une fonction	21
3.2.4 Définition et introduction à l'opérateur gradient	22
3.2.5 Propriétés	22
3.2.6 Dérivation des fonctions composées de plusieurs variables- Règle de la chaîne	23
3.2.7 Exemples d'utilisation de la règle de la chaîne	23
3.3 Formes différentielles	25
3.3.1 Définitions	25
3.3.2 Conditions nécessaires de totale différentiabilité	26
3.4 Application aux calculs des incertitudes	27
3.4.1 Problématique	27
3.4.2 Incertitudes et différentielles	28

3.1 Fonctions de plusieurs variables réelles

3.1.1 Fonction de plusieurs variables réelles

Définition

Définition 3.1.1 *On appelle fonction de plusieurs variables réelles, toute application de \mathbb{R}^n (ou une partie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p (ou une partie de \mathbb{R}^p). Lorsque $p = 1$ (resp. $p > 1$), on dit que l'on a affaire à une fonction scalaire (resp. vectorielle))*

▷ Physique

Ainsi le potentiel scalaire V , en électrostatique dans \mathbb{R}^3 est-il représenté par une fonction scalaire dépendant des trois variables d'espace x , y et z . Le potentiel vecteur \vec{A} , quant à lui, est une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 ; il est donc représenté par une fonction vectorielle.

Conventions d'écriture

Soit \vec{u} un vecteur représenté par ses coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) et f une fonction des n variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on note $f(\vec{u})$ en lieu et place de $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Si \vec{u} est tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, on pourra alléger l'écriture en notant $f(M)$ plutôt que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.1.2 Limite d'une fonction

Définition 3.1.2 On suppose qu'une fonction f est définie dans un disque ouvert de centre M_0 , noté \mathcal{D}_{M_0} , sauf éventuellement au point M_0 lui-même. On dit que la fonction $f(M)$ tend vers la limite L lorsque M tend vers M_0 et l'on note $f(M) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} L$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha / |\overrightarrow{MM_0}| < \alpha \implies \|f(M) - L\| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

3.1.3 Fonctions continues

Définition 3.1.3 On dit que fonction f est continue au point M_0 , s'il existe un disque \mathcal{D}_{M_0} où en chaque point M de ce disque la fonction $f(M)$ est définie¹ et que l'on a : $f(M) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} f(M_0)$.

Exemple 3.1.4 La fonction $g(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$ est continue sur tout \mathbb{R}^2 .

Exemple 3.1.5 La fonction $h(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'est pas continue à l'origine.

3.1.4 Dérivées partielles premières

Définition 3.1.6 On définit une fonction F_i d'une seule variable à partir d'une fonction f de n variables réelles en "gelant" toutes les variables sauf la $i^{\text{ième}}$:

$$F_i(t) := f(a_1, \dots, \overset{i}{t}, \dots, a_n). \quad (3.2)$$

On appelle dérivée partielle de f par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ variable, la dérivée de cette fonction par rapport à cette variable, les autres variables restant constantes, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\vec{a}} = \frac{dF_i}{dt} \Big|_{t=a_i}, \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n). \quad (3.3)$$

On note aussi $\partial_i f|_{\vec{a}}$ ou $f'_i|_{\vec{a}}$ ou même $f'_i(\vec{a})$.

Remarque 3.1.7 On se gardera bien d'employer d'autres symboles que le "d rond", ∂ , comme on voit dans certaines copies. **Ainsi les lettres "d" et "δ" sont-elles absolument à proscrire, car elles ont une signification propre qui**

¹On notera que contrairement à la notion précédente la fonction f doit être définie partout dans le disque et *a fortiori* au point M_0 .

n'est pas la signification de la dérivation partielle. À cet égard, considérons l'exemple suivant. En premier lieu, définissons la fonction de trois variables suivant :

$$f(x, y, t) := x \sin y + \cos(\Omega t), (\Omega \in \mathbb{R}) \quad (3.4)$$

Il peut arriver, en cinématique, par exemple, que les variables x , y et t ne soient pas des variables indépendantes. Ainsi, dans cet exemple, on considère que x et y sont des fonctions de t :

$$x(t) = at \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad y(t) = \Omega t. \quad (3.5)$$

Dans ce cas, on peut définir la fonction F ne dépendant que de t , de la manière suivante :

$$F(t) := f(x(t), y(t), t) = at \sin(\Omega t) + \cos(\Omega t). \quad (3.6)$$

On définit alors la dérivée totale de f par rapport à t et noté $\frac{df}{dt}$ la dérivée de F par rapport à t : $\frac{df}{dt} := \frac{dF}{dt}$. Dans notre exemple, on trouve :

$$\frac{df}{dt} = a \sin(\Omega t) + a \Omega t \cos(\Omega t) - \Omega \sin(\Omega t), \quad (3.7)$$

alors que la dérivée partielle de f par rapport à t vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Omega \sin(\Omega t). \quad (3.8)$$

On trouve que $\frac{df}{dt} \neq \frac{\partial f}{\partial t}$. On retiendra que pour calculer la dérivée partielle d'une fonction par rapport à une variable, on fait abstraction du caractère indépendant des variables en jeu.

Exemple 3.1.8 Soit f la fonction définie par $f = x \tan y$. On trouve $\frac{\partial f}{\partial x} = \tan y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x(1 + \tan^2 y)$.

▷ Physique

1. Dans un fluide en mouvement, la masse volumique $\rho(x, y, z, t)$ et la vitesse des molécules de fluide $\vec{v}(x, y, z, t)$ sont reliées par l'équation suivante, appelées équation de conservation de la masse²

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

2. En électrostatique, le lien entre le champ électrique et la densité de charges ρ est le suivant : $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, c'est-à-dire

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

3.1.5 Dérivées partielles secondes

Définition 3.1.9 Considérons la fonction G définie comme suit :

$$G_j(t) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, t, \dots, a_n). \quad (3.9)$$

²On verra au chapitre 8 que cette égalité peut se réécrire avec un opérateur appelé opérateur divergence : $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

On appelle *dérivée partielle seconde* par rapport à la $i^{\text{ième}}$ puis par rapport à la $j^{\text{ième}}$ variable, la quantité : $\frac{dG_j}{dt}|_{t=a_j}$. Cette quantité est notée $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) |_{\vec{a}}$ ou bien plus simplement $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} |_{\vec{a}}$ ou bien $\partial_{j_i}^2 f |_{\vec{a}}$ ou bien encore $f''_{j_i}(\vec{a})$.

A priori et sauf indication supplémentaire sur la régularité de la fonction f , l'ordre des dérivées partielles est importante, à savoir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} |_{\vec{a}} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} |_{\vec{a}} .$$

En revanche, si l'on sait que la fonction f est suffisamment régulière, on a recours au théorème de Schwarz.

3.1.6 Théorème de Schwarz

Théorème 3.1.10 Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et sont continues au point \vec{a} – on dit alors que la fonction f est deux fois continûment différentiable au point \vec{a} – alors l'ordre des dérivations est sans importance :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} |_{\vec{a}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} |_{\vec{a}} .$$

Exemple 3.1.11 Considérons la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) . \quad (3.10)$$

Le lecteur vérifiera que $\partial_x f = \frac{x}{x^2 + y^2}$ et $\partial_y f = \frac{y}{x^2 + y^2}$, et que l'on bien $\partial_{x,y} f = \partial_{y,x} f = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$.

3.1.7 Fonctions linéaires de plusieurs variables

Définition 3.1.12 La fonction Φ est une fonction (scalaire ou vectorielle) linéaire, si et seulement si elle vérifie l'égalité suivante

$$\Phi(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \Phi(\vec{a}_1) + \lambda_2 \Phi(\vec{a}_2) \quad (3.11)$$

pour tout couple de scalaires (λ_1, λ_2) et tout couple de vecteurs (\vec{a}_1, \vec{a}_2) .

Propriété

Soit Φ une fonction de n variables x_1, \dots, x_n , si Φ est une fonction linéaire, alors $\Phi = \sum_i a_i x_i$, où a_i sont des coefficients constants (éventuellement vecteurs constants complexes)

Exemple 3.1.13 La fonction vectorielle $\vec{u}(x, y, z)$ définie par

$$\vec{u}(x, y, z) = (3x + y)\vec{e}_1 + 5x\vec{e}_2 + (x + y + z)\vec{e}_3 \quad (3.12)$$

est une fonction linéaire, cependant que la fonction scalaire $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = x \sin(y) \quad (3.13)$$

ne l'est pas.

3.2 Différentielle d'une fonction

3.2.1 Différentielle d'une fonction d'une variable

Une fonction f est différentiable au point x_0 , s'il existe une fonction linéaire Φ telle que :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \Phi(h)}{h} = \varepsilon(h), \quad (3.14)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Lorsqu'elle existe la fonction Φ est unique et est appelée différentielle de la fonction f au point x_0 . Elle est notée $d_{x_0}f(h)$. On donc, compte tenu de cette notation :

$$\Phi(h) = a h = d_{x_0}f(h).$$

Par ailleurs, l'égalité (3.14) conduit à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.15)$$

Or, d'une part, on a $\frac{\Phi(h)}{h} = a$, pour tout h et d'autre part, reconnaissant le membre de droite comme étant le taux d'accroissement de la fonction f au point x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, ce qui conduit à $a = f'(x_0)$. En définitive, on est conduit à l'égalité :

$$d_{x_0}f(h) = f'(x_0) h. \quad (3.16)$$

Par ailleurs, si l'on considère la fonction identité $x(h) = h$, on trouve $d_{x_0}(h) = h$. On peut donc réécrire l'égalité (3.16) comme suit :

$$d_{x_0}f = f'(x_0) d_{x_0}x \quad (3.17)$$

Enfin, si l'on s'intéresse à la différentielle de la fonction f en tout point x où elle est définie, on reprend l'égalité ci-dessus en "oubliant" x_0 , soit

$$df = f'(x) dx. \quad (3.18)$$

3.2.2 Dérivation des fonctions composées

Considérons une fonction y dérivable au point x_0 et une fonction f dérivable au point $y_0 = y(x_0)$. On définit alors une fonction composée u par $u(x_0) = f(y(x_0)) = f \circ y(x_0)$. Il existe un lien entre la dérivée de la fonction u au point x_0 , la dérivée de y au point x_0 et la dérivée de la fonction f au point $y_0 = y(x_0)$:

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=y_0}, \quad (3.19)$$

que l'on écrit parfois de manière plus condensée mais de manière sans doute moins explicite :

$$\frac{du}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) \frac{df}{dx}(y(x_0)). \quad (3.20)$$

3.2.3 Remarque sur le caractère intrinsèque de la différentielle d'une fonction

Poursuivant les calculs donnés plus haut. On obtient :

$$d_{y_0}f = f'(y_0) d_{y_0}y \quad (3.21)$$

et

$$d_{x_0}u = u'(x_0) d_{x_0}x = \frac{dy}{dx}(x_0) \frac{df}{dx}(y(x_0)) d_{x_0}x \quad (3.22)$$

Mais $d_{y_0}y = \frac{dy}{dx}(x_0) d_{x_0}x$, ce qui donne l'égalité fondamentale suivante :

$$d_{x_0}u = d_{y_0}f \quad (3.23)$$

Cette dernière égalité malgré son apparente et déconcertante simplicité cache un secret : elle met en exergue le caractère intrinsèque de la différentielle d'une fonction. L'expression de la fonction dépend bien évidemment de la variable avec laquelle vous l'exprimez (ici x et y), les dérivées partielles sont aussi dépendantes des variables, mais pas la différentielle. Cette propriété extrêmement importante sera aussi valable pour les différentielles de plusieurs variables.

3.2.4 Définition et introduction à l'opérateur gradient

Définition 3.2.1 Une fonction f est différentiable au point \vec{a}_0 , s'il existe une fonction linéaire Φ telle que :

$$\frac{f(\vec{a}_0 + \vec{h}) - f(\vec{a}_0) - \Phi(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \varepsilon(\|\vec{h}\|), \quad (3.24)$$

avec $\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\|\vec{h}\|) = 0$. La fonction Φ s'appelle différentielle de la fonction f au point \vec{a}_0 et est notée $d_{\vec{a}_0}f$.

Compte tenu de la linéarité de la fonction Φ , $d_{\vec{a}_0}f$ s'écrit :

$$d_{\vec{a}_0}f = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\vec{a}_0) h_i. \quad (3.25)$$

Mais l'égalité (3.24) pour $\vec{h} = h \vec{e}_i$ conduit à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a}_0 + h \vec{e}_i) - f(\vec{a}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h \vec{e}_i)}{h}. \quad (3.26)$$

Or, on a d'une part $\Phi(h \vec{e}_i) = \lambda_i(\vec{a}_0) h$ et d'autre part le membre de gauche s'identifie à $\partial_i f(\vec{a}_0)$. On en déduit que $\lambda_i(\vec{a}_0) = \partial_i f(\vec{a}_0)$, ce qui nous conduit à :

$$d_{\vec{a}_0}f = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\vec{a}_0) h_i. \quad (3.27)$$

En utilisant la notation différentielle déjà utilisée au paragraphe précédent, on trouve :

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\vec{a}_0) dx_i. \quad (3.28)$$

Ce résultat se met manifestement sous forme d'un produit scalaire. En l'occurrence, si l'on note $\text{grad } f(\vec{a}_0)$, le vecteur dont les composantes sont $(\partial_1 f(\vec{a}_0), \dots, \partial_i f(\vec{a}_0), \dots, \partial_n f(\vec{a}_0))$, (i.e. $\text{grad } f(\vec{a}_0) = \sum_i \partial_i f(\vec{a}_0) \vec{e}_i$) et le vecteur $d\vec{x} = \sum_i dx_i \vec{e}_i$:

$$df = \text{grad } f(\vec{a}_0) \cdot d\vec{x}. \quad (3.29)$$

3.2.5 Propriétés

1. Linéarité

Soit f et g deux fonctions différentiables et λ et μ deux scalaires : $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$.

2. Leibnitz

$$d(fg) = f dg + g df$$

3. différentielle logarithmique

$$\frac{d(fg)}{fg} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}$$

3.2.6 Dérivation des fonctions composées de plusieurs variables – Règle de la chaîne

Considérons une fonction vectorielle $\vec{y} = \sum_i y_i \vec{e}_i$ dérivable au point $\vec{x}_0 = \sum_i x_{0,i} \vec{e}_i$ et une fonction f dérivable au point $\vec{y}_0 = \sum_i y_i(\vec{x}_0) \vec{e}_i$, on a alors la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{y}(\vec{x}))|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial x_k}|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \cdot \text{grad } f|_{\vec{y}=\vec{y}_0} \quad (3.30)$$

Il s'agit de bien se familiariser avec ces notations condensées. Examinons, à cet effet un exemple avec une fonction de trois variables. Considérons une fonction f de trois variables réelles (x_1, x_2, x_3) et trois fonctions y_1, y_2 et y_3 , elles-mêmes fonctions de trois variables. Enfin, on considère la fonction composée $F(x_1, x_2, x_3) := f(y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3), y_3(x_1, x_2, x_3))$.³ S'il advenait qu'on ait besoin de calculer la dérivée partielle de F par rapport à x_1 , on utiliserait l'égalité (3.30) qui se traduirait de manière développée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(y_1(x_1, x_2, x_3), y_2(x_1, x_2, x_3), y_3(x_1, x_2, x_3)) &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \frac{\partial f}{\partial y_1}|_{\vec{y}=\vec{y}_0} \\ &+ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \frac{\partial f}{\partial y_2}|_{\vec{y}=\vec{y}_0} \\ &+ \frac{\partial y_3}{\partial x_1}|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \frac{\partial f}{\partial y_3}|_{\vec{y}=\vec{y}_0}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.2.7 Exemples d'utilisation de la règle de la chaîne

- Calcul de la différentielle de la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Dans cet exemple, il s'agit de mettre en exergue le caractère intrinsèque de la différentielle. Pour cela, on va effectuer un certain nombre de changement de variables. . .

- Commençons par un changement de variables trivial : $u = x$ et $v = y$. Si l'on pose $g(u, v) := f(u, v)$, on a alors $g(x, y) = f(x, y)$. Fort de ces égalités dignes de M. de La Palice, calculons la différentielle dg , soit :

$$dg = \partial_u g du + \partial_v g dv. \quad (3.32)$$

Un calcul sans difficulté nous mène à : $\partial_u g = 2v^2 \frac{2u}{(u^2 + v^2)}$ et $\partial_v g = -2u^2 \frac{2v}{(u^2 + v^2)}$. Ainsi donc

$$dg = \frac{4uv}{(u^2 + v^2)^2} (v du - u dv). \quad (3.33)$$

Il s'ensuit que df vaut :

$$df = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} (y dx - x dy). \quad (3.34)$$

- Qu'advient-il maintenant si l'on fait un autre changement de variables que celui proposé plus haut ? Pour tout point $x \neq 0$, il est loisible de présenter la fonction f sous la forme suivante :

$$f = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}. \quad (3.35)$$

³En notation plus condensée, on aurait : $F(\vec{x}) := f(\vec{y}(\vec{x}))$

À l'évidence, cette fonction dépend de x et y par le truchement de la fonction $(\frac{y}{x})^2$. Il semble donc opportun de choisir un changement de variables qui privilégie cette fonction, soit $u(x, y) = (\frac{y}{x})^2$, la deuxième variable v ne faisant que de la figuration puisque la fonction f ne dépend que de u ! Ainsi cette fois la fonction g ne dépend-elle que de u : $g(u, v) = \frac{1-u}{1+u}$. Calculons de nouveau la différentielle de g , soit $dg = \partial_u g du$ ⁴. On trouve sans trop de difficulté

$$\partial_u g = \frac{-2}{(1+u)^2} \quad (3.36)$$

soit

$$dg = \frac{-2}{(1+u)^2} du . \quad (3.37)$$

Si maintenant on veut exprimer de nouveau cette différentielle en fonction du jeu de variables x et y , on obtient :

$$dg = \frac{-2}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right)^2 . \quad (3.38)$$

Mais

$$d\left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{2y^2}{x^3} dx + \frac{2y}{x^2} dy , \quad (3.39)$$

ce qui conduit à

$$dg = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} (y dx - x dy) , \quad (3.40)$$

où l'on aura reconnu l'expression de la différentielle de f .

(c) Expérimentons maintenant un autre changement de variables :

$$\begin{cases} u(x, y) &= x^2 - y^2 \\ v(x, y) &= x^2 + y^2 \end{cases} \quad (3.41)$$

On a alors la fonction g qui est simplement le rapport de u et de v : $g(u, v) = \frac{u}{v}$. Compte tenu de ces définitions, on a encore

$$f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)) . \quad (3.42)$$

Reprenons les vieilles recettes. La différentielle dg est donnée par $dg = \partial_u du + \partial_v dv$. Le calcul, cette fois, est élémentaire :

$$dg = \frac{1}{v^2} (v du - u dv) \quad (3.43)$$

Mais $du = 2x dx - 2y dy$ et $dv = 2x dx + 2y dy$, qui nous conduit au résultat escompté à savoir $dg = df$.

(d) Le lecteur s'est sans doute convaincu par l'exemple que quel que soit le changement de variables, il doit avoir $df = dg$. Donnons, malgré tout un dernier exemple formateur puisqu'il s'agit du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. En l'occurrence, effectuons le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \end{cases} \quad (3.44)$$

⁴ *Bis repetita placent*, la fonction g ne dépendant que de u , on a $\partial_v g = 0$ pour toute fonction v admissible !

Constatons qu'ici, on a donné x et y en fonction de u et v et non le contraire. Il s'agit donc maintenant de trouver la fonction g telle que $g(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$. Pour cela, il suffit d'expliciter $x^2 + y^2$ et $x^2 - y^2$ en fonction de u et v .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= u^2 \\ x^2 - y^2 &= u^2 (\cos^2 v - \sin^2 v) = u^2 \cos(2v) \end{cases} \quad (3.45)$$

Ainsi donc la fonction g ne dépend-elle que de la variable angulaire v , soit

$$g(u, v) = \cos(2v). \quad (3.46)$$

Une fois encore calculons dg soit $dg = \partial_v g dv = -2 \sin(2v) dv$. Pour revenir aux variables x et y , il s'agit maintenant d'exprimer $\sin(2v)$ en fonction de x et y . Pour cela, il s'agit de maîtriser un peu les règles de trigonométrie les plus élémentaires. $xy = u^2 \sin u \cos v = \frac{1}{2} \sin(2v)$. Il vient

$$\sin(2v) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}. \quad (3.47)$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer dv en fonction du jeu de variables x et y .

$$\begin{aligned} dv &= d \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx\right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx) \end{aligned} \quad (3.48)$$

On vérifie, une fois encore, que l'on a bien $dg = df$.

Il faut donc retenir de ce qui précède, que les fonctions g qui apparaissent plus haut sont une autre expression de la fonction f . Ainsi les dérivées partielles de ces fonctions en fonction de leurs variables respectives sont-elles différentes, mais leur différentielle est une donnée invariable. On devait s'y attendre; la définition de la différentielle ne fait pas appel aux coordonnées...

2. Calcul de la différentielle de la fonction f définie par $f(x, y, z) = e^{ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, où k est un scalaire éventuellement complexe.

Si l'on pose $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la fonction $g(\rho) = e^{ik\rho}$ est bien telle que $g(\rho) = f(x, y, z)$. Le calcul de la différentielle dg est chose aisée : $dg = ik e^{ik\rho} d\rho$. Il est élémentaire de calculer $d\rho$ en fonction du jeu de variables x, y et z : $d\rho = \frac{x dx + y dy + z dz}{\rho}$. En définitive $df = ik \frac{e^{ik\rho}}{\rho} (x dx + y dy + z dz)$.

3.3 Formes différentielles

3.3.1 Définitions

Définition 3.3.1 (Forme différentielle) On appelle forme différentielle toute quantité ω telle que :

$$\omega = \sum_i a_i(\vec{x}) dx_i = \vec{a}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (3.49)$$

Définition 3.3.2 (Forme différentielle totale (exacte)) On dit que forme différentielle ω est une forme différentielle totale (ou exacte) s'il existe une fonction f telle que $\omega = df$.

▷ Physique

En thermodynamique, l'énergie interne est une différentielle totale, notée dU . Si on

exprime l'énergie interne en fonction de l'entropie S et du volume V , la différentielle s'exprime alors comme suit :

$$dU = T dS - P dV . \quad (3.50)$$

3.3.2 Conditions nécessaires de totale différentiabilité

En dimension 2

S'il existe une fonction f telle que $\omega = df$, alors on doit avoir d'une part :

$$\omega = a_1(x, y) dx + a_2(x, y) dy \quad (3.51)$$

et d'autre part

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (3.52)$$

On doit donc avoir $\frac{\partial f}{\partial x} = a_1$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = a_2$. Le théorème de Schwarz conduit alors à la relation entre a_1 et a_2 suivante :

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} . \quad (3.53)$$

Insistons sur le fait que cette relation est une condition nécessaire mais non suffisante *a priori*.

▷ **Physique**

Dans l'exemple précédent concernant l'énergie interne, la relation (3.53) donne :

$$\frac{\partial T}{\partial V} = - \frac{\partial P}{\partial S} . \quad (3.54)$$

En thermodynamique, l'écriture traditionnelle est plutôt la suivante :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V , \quad (3.55)$$

mettant en exergue que la dérivée partielle de T (resp. P) par rapport à V (resp. S) se fait à S (resp. V) constante.

Exemple

On considère une forme différentielle $\omega = a_1(x, y) dx + a_2(x, y) dy$, avec $a_1(x, y) = \sin y + x^2$ et $a_2(x, y) = x \cos y$. On cherche à savoir si cette forme est une forme différentielle totale. Et si oui, on cherche à savoir de quelle fonction f cette forme est la différentielle. On vérifie d'abord que le critère (3.53) est bien vérifié :

$$\partial_y a_1 = \cos y \quad \text{et} \quad \partial_x a_2 = \cos y . \quad (3.56)$$

Il existe donc probablement une fonction f telle que

$$\partial_x f = \sin y + x^2 \quad (3.57)$$

et

$$\partial_y f = x \cos y \quad (3.58)$$

Partant de cette dernière égalité, on cherche une primitive de $x \cos y$ (x étant momentanément considéré comme un paramètre), soit :

$$f = x \sin(y) + F(x) , \quad (3.59)$$

où F est une fonction de l'unique variable x et qu'il reste à déterminer. Il suffit pour cela de se servir de l'autre équation :

$$\partial_x f = \sin y + F'(x) = \sin y + x^2, \quad (3.60)$$

ce qui conduit à $F'(x) = x^2$, puis à $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. La fonction f cherchée (à une constante près) est donc :

$$f(x, y) = x \sin y + \frac{1}{3}x^3. \quad (3.61)$$

En dimension 3

S'il existe une fonction f telle que $\omega = df$, on doit avoir

$$\omega = \vec{a} \cdot \vec{dx} = df = \text{grad } f \cdot \vec{dx} \quad (3.62)$$

On doit donc avoir une relation du type $\text{grad } f = \vec{a}$. Or on verra lorsqu'on abordera les champs de vecteurs que l'on doit avoir alors : $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$, ce qui se traduit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_2 a_3 - \partial_3 a_2 = 0 \\ \partial_3 a_1 - \partial_1 a_3 = 0 \\ \partial_3 a_2 - \partial_2 a_1 = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

3.4 Application aux calculs des incertitudes

3.4.1 Problématique

Supposons que l'on ait accès à un certain nombre de résultats de mesures indépendants⁵ et que l'on cherche à déduire une grandeur physique par une "loi" reliant ladite grandeur aux grandeurs mesurées. Pour fixer les idées, supposons qu'aux bornes d'un générateur d'une résistance ohmique, on mesure l'intensité I et la différence de potentiel V . La valeur de la résistance R est donnée par la loi d'Ohm à savoir $R = \frac{U}{I}$. Dans cet exemple U et I sont les grandeurs mesurées cependant que la loi est la loi d'Ohm. Ce résultat serait sans doute complètement satisfaisant si l'on connaissait parfaitement U et I . Comme, vous le savez sans doute U et I sont connus avec une certaine incertitude, soit ΔI et ΔU , ces deux dernières valeurs étant des réels positifs. Par *incertitude*, on veut dire que si U_{ex} et I_{ex} représentent les "valeurs exactes"⁶ *i.e.* aussi les valeurs mesurées idéalement avec une précision infinie et si U_{mes} et I_{mes} désignent les valeurs effectivement mesurées, on doit avoir :

$$U_{\text{ex}} \in [U_{\text{mes}} - \Delta U, U_{\text{mes}} + \Delta U] \quad (3.64)$$

et

$$I_{\text{ex}} \in [I_{\text{mes}} - \Delta I, I_{\text{mes}} + \Delta I]. \quad (3.65)$$

À partir de ces données, on introduit deux quantités à savoir R_{ex} (valeur exacte de la résistance) et R_{cal} (valeur calculée de la résistance à partir des données mesurées U_{mes} et I_{mes}) par les deux relations :

$$R_{\text{ex}} = \frac{U_{\text{ex}}}{I_{\text{ex}}} \quad \text{et} \quad R_{\text{cal}} = \frac{U_{\text{mes}}}{I_{\text{mes}}}. \quad (3.66)$$

⁵On verra par la suite le sens qu'il faut donner à ce mot.

⁶Il va de soi que les mots "valeurs exactes" sont eux-mêmes sujets à caution : la loi d'Ohm est elle-même une "loi" qui doit être présentée dans un cadre d'application... (cf. cours d'épistémologie.)

Il va sans dire que l'on n'a accès effectivement qu'à R_{cal} . Il est donc illusoire de déduire de l'expérience R_{ex} . En revanche, on peut calculer la précision ΔR , à partir de U_{mes} , I_{mes} , ΔU et ΔI pour que

$$R_{\text{ex}} \in [R_{\text{cal}} - \Delta R, R_{\text{cal}} + \Delta R] . \quad (3.67)$$

Revenons maintenant à plus de généralités. Soit \vec{x}_{mes} un vecteur à n composantes correspondant à n grandeurs indépendantes mesurées expérimentalement avec une précision $\{\Delta x_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$. Soit y une grandeur physique liée aux x_i par une "loi fonction"

$$y = f(\vec{x}) . \quad (3.68)$$

On cherche à connaître l'incertitude Δy pour que l'on ait à coup sûr

$$y_{\text{ex}} \in [y_{\text{cal}} - \Delta y, y_{\text{cal}} + \Delta y] . \quad (3.69)$$

3.4.2 Incertitudes et différentielles

Si l'on accepte l'idée que les mesures sont suffisamment précises⁷ pour considérer que localement (*i.e.* autour du point de mesure \vec{x}_{mes}) la fonction f peut être assimilée à une fonction linéaire, la quantité $d_{\vec{x}_{\text{mes}}} y$ est un candidat naturel pour représenter la variation de y autour du point \vec{x}_{mes} . Soit

$$d_{\vec{x}_{\text{mes}}} y = \sum_i \partial_i f|_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{mes}}} dx_i \quad (3.70)$$

ce qui conduit à

$$|d_{\vec{x}_{\text{mes}}} y| \leq \sum_i |\partial_i f|_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{mes}}}| |dx_i| . \quad (3.71)$$

Rappelant que l'incertitude est une grandeur réelle et positive, on assimilera $|d_{\vec{x}_{\text{mes}}} y|$ à Δy et les $|dx_i|$ aux Δx_i . On trouve alors :

$$\Delta y \leq \Delta y_{\text{max}} \quad (3.72)$$

avec

$$\Delta y_{\text{max}} = \sum_i |\partial_i f|_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{mes}}}| \Delta x_i . \quad (3.73)$$

Par la suite, on assimilera Δy à Δy_{max} pour garantir le critère (3.69). Revenons maintenant à l'exemple de la loi d'Ohm. On cherche à calculer ΔR , ce qui, compte tenu de ce qui vient d'être dit est un jeu d'enfant :

$$\Delta R = |\partial_U R(U, I)| \Delta U + |\partial_I R(U, I)| \Delta I \quad (3.74)$$

Mais $\partial_U R = \frac{1}{I}$ et $\partial_I R = -\frac{U}{I^2}$, soit

$$\Delta R = \frac{1}{I} \Delta U + \frac{U}{I^2} \Delta I . \quad (3.75)$$

Enfin pour clore le chapitre, signalons que la plupart du temps, on ne s'intéresse pas directement à l'incertitude absolue ΔR , en l'occurrence, mais à l'incertitude relative soit le rapport $\frac{\Delta R}{R}$. On trouve alors

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} . \quad (3.76)$$

Autrement dit l'incertitude relative sur R est la somme des incertitudes relatives sur U et I . **Il faut bien entendu prendre garde de ne pas généraliser ce résultat qui tire sa simplicité de celle de la loi d'Ohm.**

⁷ On veut dire par là que $\frac{\Delta x_i}{x_{i,\text{mes}}} \ll 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Chapitre 4

Équations différentielles ordinaires

Sommaire

4.1	Définitions	29
4.2	Solutions d'une équation différentielle ordinaire	30
4.2.1	Remarques générales	30
4.2.2	Fonctions usuelles	30
4.2.3	Familles de solutions, conditions initiales et conditions aux limites	30
4.3	Exemples de solution d'équations différentielles	30
4.3.1	Équations différentielles du premier ordre	30
4.3.2	Équations différentielles du second ordre	32

4.1 Définitions

Définition 4.1.1 (Équation différentielle) *On appelle équation différentielle toute équation qui contient des dérivées d'une fonction Ψ par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes.*

Exemple 4.1.2

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + x\Psi^2 = 0. \quad (4.1)$$

Exemple 4.1.3

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.2)$$

Définition 4.1.4 (Équation différentielle ordinaire) *On appelle équation différentielle ordinaire toute équation différentielle qui contient uniquement des dérivées par rapport à une variable indépendante. C'est le cas de l'équation 4.1.*

Définition 4.1.5 (Équation aux dérivées partielles) *On appelle équation aux dérivées partielles toute équation différentielle qui contient des dérivées partielles par rapport à plusieurs variables indépendantes. C'est le cas de l'équation 4.2.*

Définition 4.1.6 (Ordre d'une équation différentielle) *C'est l'ordre de dérivation le plus élevé (2 dans le cas des équations 4.1 et 4.2).*

▷ **Physique**

Les équations différentielles ordinaires interviennent dans tous les domaines de la Physique dès lors que l'on aborde des modèles monodimensionnels (cinétique, électrocinétique, conduction de la chaleur, . . .)

4.2 Solutions d'une équation différentielle ordinaire

4.2.1 Remarques générales

Trouver les solutions des équations différentielles générales est un problème très difficile. On ne cherchera que la solution de certaines équations différentielles particulières. Autrement dit, chercher les solutions de l'équation différentielle ordinaire $F(x, \Psi, \Psi', \dots, \Psi^{[n]}) = 0$ est un problème difficile. On ne cherchera des solutions que pour des fonctions F très particulières.

4.2.2 Fonctions usuelles

Toutes les fonctions utilisées en premier cycle (et bien d'autres encore) sont des solutions d'équations différentielles particulières. Ainsi prenons la fonction sinusoïdale $f_1(x) = \sin(\omega x)$, cette dernière est solution de

$$f_1'' + \omega^2 f_1 = 0. \quad (4.3)$$

Il en est de même pour $f_2(x) = \cos(\omega x)$. Remarquons que la fonction f , combinaison linéaire de f_1 et f_2 est encore solution du type 4.4. Si maintenant l'on considère la fonction $g(x) = \tan x$, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$g' - g^2 - 1 = 0. \quad (4.4)$$

4.2.3 Familles de solutions, conditions initiales et conditions aux limites

Pour qu'une équation différentielle admette une solution unique (la solution du problème physique ou de chimie) il faut en plus imposer un certain nombre de contraintes lesquelles dépendent du problème considéré. Ainsi dans le problème du pendule pesant et dans l'approximation des petites oscillations si θ représente l'angle entre la droite passant par l'axe de rotation et le centre de gravité dudit pendule et l'axe vertical, θ est solution de :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (4.5)$$

on impose, en général, des conditions à l'instant $t = 0$, du type $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. On a, en effet $\theta(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ où a et b apparaissent comme des paramètres et définissent des familles de solutions. Cependant une seule fonction (*i.e.* un couple (a, b) unique) sera telle que $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ avec θ_0 et $\dot{\theta}_0$ donnés. On a, en effet, $\theta(0) = \theta_0 = a$ et $\dot{\theta}(0) = -\omega_0 b = \dot{\theta}_0$, soit $a = \theta_0$ et $b = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$. La solution, appelé parfois équation horaire, est donc :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (4.6)$$

4.3 Exemples de solution d'équations différentielles

4.3.1 Équations différentielles du premier ordre

On doit donc trouver les solutions du type $F(x, \Psi, \Psi') = 0$.

Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Dans ce cas, on a

$$\Psi' = g(x) h(\Psi), \quad (4.7)$$

soit

$$\frac{d\Psi}{h(\Psi)} = g(x) dx. \quad (4.8)$$

Si l'on connaît une primitive H de $\frac{1}{h}$ et une primitive G de g , l'équation précédente prend alors la forme suivante :

$$dH = dG \quad (4.9)$$

ce qui conduit à $H(\Psi) = G(x) + C$, où C est une constante arbitraire qui se déduit d'une condition initiale du type $\Psi(0) = \Psi_0$ de la manière suivante :

$$H(\Psi_0) = G(0) + C \quad (4.10)$$

soit encore

$$C = H(\Psi_0) - G(0) \quad (4.11)$$

Exemple 4.3.1 *Supposons que l'on veuille connaître la solution de l'équation différentielle suivante*

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{\Psi^2}{x}, \quad (4.12)$$

avec comme condition $\Psi(1) = a$, où a est un scalaire quelconque. Voici comment on procède. On commence par mettre l'équation différentielle sous la forme 4.8, soit

$$-\frac{d\Psi}{\Psi^2} = \frac{dx}{x} \quad (4.13)$$

ce qui donne

$$d\left(\frac{1}{\Psi}\right) = d(\ln x) \quad (4.14)$$

puis

$$\frac{1}{\Psi} = \ln x + C. \quad (4.15)$$

On a donc la solution générale :

$$\Psi(x) = \frac{1}{\ln x + C}. \quad (4.16)$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser la condition $\Psi(1) = a$:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\ln x + \frac{1}{a}}. \quad (4.17)$$

Équations différentielles ordinaires du premier ordre linéaire

Il s'agit donc de résoudre les équations du type :

$$a(x) \Psi' + b(x) \Psi = s(x). \quad (4.18)$$

1. Résolution de l'équation «sans second membre»

Pour résoudre l'équation différentielle précédente, on commence par résoudre l'équation différentielle avec un second membre nul, connue sous le sobriquet étrange d'équation sans second membre. Pour curieux que puisse paraître ce colifichet, attelons-nous à la tâche et appelons Ψ_0 une solution de l'équation

$$a(x) \Psi_0' + b(x) \Psi_0 = 0 \quad (4.19)$$

En supposant que $a(x)$ ne s'annule pas, on pose $f(x) := -\frac{b(x)}{a(x)}$ et l'on obtient :

$$\frac{d\Psi_0}{\Psi_0} = f(x) dx . \quad (4.20)$$

On reconnaît alors un cas particulier déjà traité lors du paragraphe précédent. Si F est une primitive f , on obtient :

$$d(\ln |\Psi_0|) = dF , \quad (4.21)$$

d'où l'on tire

$$\ln |\Psi_0| = F + C \quad (4.22)$$

soit encore

$$\Psi_0 = \lambda_0 e^{F(x)} . \quad (4.23)$$

2. Recherche d'une solution particulière de l'équation 4.18

On est maintenant en mesure de chercher une solution particulière de l'équation différentielle générale. Là encore, le vocable utilisé tient du sabir : on utilise la technique de la variation de la constante, ce qui est quand même le comble du paradoxe. La raison de cette étrangeté lexicale tient dans le fait que l'on recherche des solutions du type $\Psi = \lambda(x) \Psi_0$. Ainsi donc, il appert que les solutions de l'équation générale sont des solutions qui sont à chercher sous la forme 4.23 où la constante λ_0 est remplacée par une fonction que l'on appelle λ , laquelle est notre nouvelle fonction inconnue. En effet, en dérivant Ψ , on obtient

$$\Psi' = \lambda' \Psi_0 + \lambda \Psi_0' , \quad (4.24)$$

expression qui est introduite dans l'équation générale pour donner :

$$a(x)\lambda' \Psi_0 + \lambda \underbrace{(a(x)\Psi_0' + b(x)\Psi_0)}_{=0} = s(x) , \quad (4.25)$$

Ainsi donc, contrairement à Ψ , λ n'apparaît que par le truchement de sa dérivée, ce qui facilite sa détermination. En l'occurrence λ' vaut :

$$\lambda' = \frac{s}{a \Psi_0} . \quad (4.26)$$

Ainsi donc si Λ est une primitive du membre de droite, on obtient une solution particulière de l'équation générale, sous la forme

$$\Psi = \Lambda \Psi_0 + C \Psi_0 , \quad (4.27)$$

où, une fois encore, la constante C se détermine grâce à une condition initiale $\Psi(0) = a$, par exemple.

4.3.2 Équations différentielles du second ordre

On doit donc chercher des solutions du type $F(x, \Psi, \Psi', \Psi'') = 0$.

Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Il faut donc chercher des solutions du type

$$\Psi'' + p \Psi' + q \Psi = s(x) . \quad (4.28)$$

Pour ce faire, il faut de nouveau commencer par résoudre l'équation «sans second membre», soit

$$\Psi_0'' + p \Psi_0' + q \Psi_0 = 0 . \quad (4.29)$$

1. Résolution de l'équation «sans second membre»

On cherche les solutions de l'équations sans second membre sous la forme $\Psi_0 = \exp(\alpha x)$, avec α complexe. On trouve alors que α est une solution d'une simple équation algébrique su second degré :

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0. \quad (4.30)$$

On trouve alors les deux solutions :

$$\alpha_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (4.31)$$

Il faut maintenant distinguer deux cas

(a) $p^2 \neq 4q$.

On est alors assuré d'avoir deux solutions distinctes α_1 et α_2 . La solution est donc une combinaison linéaire des fonctions exponentielles ϕ_1 et ϕ_2

$$\Psi = a\phi_1 + b\phi_2 \quad (4.32)$$

avec $\phi_j(x) = \exp(\alpha_j x)$. Il faut maintenant distinguer deux sous-cas selon le signe de $p^2 - 4q$.

i. $p^2 > 4q$. (Régime sous-critique)

Dans ce cas les scalaires α_1 et α_2 sont tous les deux réels. La solution général est donc :

$$\Psi(x) = a e^{\alpha_1 x} + b e^{\alpha_2 x}. \quad (4.33)$$

Remarque 4.3.2 Il arrive souvent que le coefficient q soit un réel positif et représente par exemple le carré d'une pulsation, soit $q = \Omega^2$. Dans ce cas $\sqrt{p^2 - 4q} > p$, ce qui a pour conséquence d'avoir deux valeurs α_1 et α_2 négatives. La solution décroît donc exponentiellement.

ii. $p^2 < 4q$. (Régime sur-critique)

On a alors deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{p}{2} + i\delta = -\lambda + i\delta \\ \alpha_2 = -\frac{p}{2} - i\delta = -\lambda - i\delta \end{cases} \quad (4.34)$$

avec $\delta := \sqrt{4q - p^2}$. Les fonctions ϕ_j s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} \phi_1 = e^{-\lambda x} e^{i\delta x} \\ \phi_2 = e^{-\lambda x} e^{-i\delta x} \end{cases} \quad (4.35)$$

La solution générale peut donc se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 :

$$\Psi(x) = a e^{-\lambda x} e^{i\delta x} + b e^{-\lambda x} e^{-i\delta x} = e^{-\lambda x} (a e^{i\delta x} + b e^{-i\delta x}). \quad (4.36)$$

Cette fonction peut évidemment se mettre aussi sous la forme suivante :

$$\Psi(x) = e^{-\lambda x} (A \cos \delta x + B \sin \delta x). \quad (4.37)$$

(b) $p^2 = 4q$. (Régime critique)

Dans ce cas particulier, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 ne font qu'une. Il faut donc trouver une autre fonction indépendante. En l'occurrence cette fonction nouvelle est à chercher sous la forme $x e^{-\lambda x}$. La fonction Ψ se met alors sous la forme :

$$\Psi(x) = b e^{-\lambda x} + a x e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} (a x + b). \quad (4.38)$$

2. Recherche d'une solution particulière de l'équation 4.28

(a) Cas général

Ce cas sera abordé lors d'un devoir.

(b) $s(x) = C$.

Dans ce cas Ψ est solution de

$$\Psi'' + p\Psi' + q\Psi = C. \quad (4.39)$$

On pose alors $\varphi = \Psi - \frac{C}{q}$ et la fonction φ est alors solution de :

$$\varphi'' + p\varphi' + q\varphi = 0. \quad (4.40)$$

On se ramène alors à une équation de type «sans second membre».

(c) $s(x) = s_0 \sin(\omega_0 x + \varphi_0)$.

Il s'agit de trouver une solution particulière de 4.28 (cf. p. 32). On cherche cette solution sous la forme d'une fonction sinusoïdale de la même pulsation que celle de la source à savoir ω_0 :

$$\Psi(x) = A \cos(\omega_0 x + \varphi) \quad (4.41)$$

Il s'agit donc de calculer A et φ . Voici comment on procède. On associe à Ψ un complexe Z que l'on appelle amplitude complexe associée à la fonction Ψ . Ce complexe Z est lié à A et φ par la représentation polaire du complexe Z : $Z = A e^{i\varphi}$. Le lien entre le nombre complexe Z et la fonction, Ψ , à laquelle elle est liée est le suivant :

$$\Psi(x) = \Re e \{ Z e^{i\omega_0 x} \}. \quad (4.42)$$

Il est par ailleurs facile de voir que l'amplitude complexe associée à Ψ' est $i\omega_0 Z$. En effet, si l'on en croit cette hypothèse, on doit avoir $\Psi' = \Re e \{ i\omega_0 A e^{i\varphi} e^{i\omega_0 x} \}$, soit $\Psi' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 x + \varphi)$, ce qui est bien le résultat escompté. De manière plus générale, on peut généraliser ce résultat à une dérivée quelconque de $\Psi^{[n]}$, à savoir que $(i\omega_0)^n Z$ est l'amplitude complexe *ad hoc*. Ainsi, dans le régime sinusoïdal, l'emploi de l'amplitude complexe conduit à métamorphoser l'opération de dérivation en simple opération algébrique, à savoir la multiplication par $(i\omega_0)^n$. Pour finir, il suffit de constater que l'amplitude complexe, \mathcal{S} , associée à la source s vaut :

$$\mathcal{S} = -i s_0 e^{i\varphi_0}. \quad (4.43)$$

L'équation générale se traduit alors de la manière suivante dans le «langage des amplitudes complexes» :

$$-\omega_0^2 Z + p i \omega_0 Z + q Z = \mathcal{S}, \quad (4.44)$$

dont la solution est :

$$Z = \frac{-i s_0 e^{i\varphi_0}}{-\omega_0^2 + i\omega_0 p + q} = A e^{i\varphi}. \quad (4.45)$$

De cette dernière expression, on en tire A et φ , ce qui permet de trouver le complexe Z et, en définitive, la fonction Ψ .

▷ **Physique**

Il arrive comme, il l'a déjà été mentionné, que la scalaire q représente le carré d'une pulsation Ω , soit $q = \Omega^2$. Par ailleurs, le nombre p est

souvent associé aux phénomènes de dissipation (frottements fluides, dans le cas de la mécanique, par exemple). Dans la cas où ces phénomènes de dissipation sont négligeables i.e. $p\omega_0 \ll \Omega^2$, on a alors Z qui se simplifie pour donner :

$$Z = \frac{-i s_0 e^{i\varphi_0}}{-\omega_0^2 + \Omega^2} = A e^{i\varphi} . \quad (4.46)$$

Ceci simplifie la résolution puisque l'on voit que Z est un nombre imaginaire pure. Le calcul est alors élémentaire et donne :

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2} \quad (4.47)$$

et¹

$$A(\omega_0) = \frac{s_0}{|-\omega_0^2 + \Omega^2|} . \quad (4.48)$$

Et l'on voit que l'amplitude devient infinie au voisinage de la fréquence propre du système Ω . Ce phénomène est d'une importance capitale et est connu sous le nom de résonance.

¹On fait apparaître A comme une fonction de ω_0 pour mettre en exergue le fait que l'amplitude de cette solution particulière dépend de la fréquence de la source.

Chapitre 5

Calcul intégral

Sommaire

5.1	Introduction	37
5.2	Primitive et intégrale indéfinie	37
5.2.1	Quelques primitives élémentaires	39
5.2.2	Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie	40
5.2.3	Intégration par changement de variable	40
5.2.4	Intégration par parties	41
5.3	Intégrale définie : intégrale de Riemann	41
5.3.1	Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann	43
5.3.2	Formule de Newton-Leibniz	44
5.3.3	Changement de variable	45
5.3.4	Intégration par parties	45
5.4	Extension de la notion d'intégrale	46
5.4.1	Intégrales avec les bornes infinies	46
5.4.2	Intégrale d'une fonction discontinue	47
5.5	Intégrale multiple	48
5.5.1	Intégrale double	48
5.5.2	Calcul des intégrales doubles	49
5.5.3	Applications des intégrales doubles au calcul des volumes	50
5.5.4	Applications des intégrales doubles au calcul des aires	50
5.5.5	Changement de variables	51

5.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons étudié l'opération de dérivation. Dans le présent chapitre nous aborderons l'opération inverse, c'est-à-dire, étant donné une fonction $f(x)$, trouver la fonction $F(x)$ telle que $f(x) = F'(x)$.

5.2 Primitive et intégrale indéfinie

Définition 5.2.1 *On appelle primitive d'une fonction f définie sur le segment $[a, b]$, la fonction $F(x)$ telle qu'en tout point $x \in [a, b]$ on a :*

$$F'(x) = f(x). \tag{5.1}$$

Remarque 5.2.2 La primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ n'est pas unique. En effet, la fonction $\tilde{F}(x) = F(x) + c$, où c est une constante arbitraire est aussi une primitive de la fonction $f(x)$.

Théorème 5.2.3 Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ alors $F_1(x) - F_2(x)$ est une constante.

En effet, on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$F_1'(x) = f(x),$$

$$F_2'(x) = f(x).$$

On pose $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, il est clair que $\varphi'(x) = 0$. Appliquons le théorème de Lagrange¹ à la fonction $\varphi(x)$. Ce théorème stipule donc l'existence d'au moins un point ξ , $a < \xi < x$ tel que :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a) = 0. \quad (5.2)$$

Par conséquent, pour tout point $x \in [a, b]$ $\varphi(x) = \varphi(a)$. En d'autres termes, la fonction $\varphi(x)$ est une fonction constante sur l'intervalle $[a, b]$.

Définition 5.2.4 On appelle *intégrale indéfinie* de la fonction $f(x)$ et on note $\int f(x)dx$ toute expression de la forme $F(x) + c$ où $F(x)$ est une primitive de f et c une constante.

$$\int f(x)dx = F(x) + c. \quad (5.3)$$

L'intégrale indéfinie représente une famille de fonctions $y = F(x) + c$. Sous le regard géométrique, l'intégrale indéfinie peut être considérée comme un ensemble de courbes telles que l'on passe de l'une à l'autre par une translation. Le lecteur peut, à juste titre, se poser la question suivante : toute fonction $f(x)$ possède-t-elle une primitive et par conséquent une intégrale indéfinie ? La réponse est non. *Cependant, nous admettrons que toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive.*

Il découle de la définition de l'intégrale indéfinie, les propriétés suivantes :

1. La dérivée de l'intégrale indéfinie est la fonction à intégrer elle-même

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x). \quad (5.4)$$

2. La différentielle d'une intégrale indéfinie est égale à l'expression "sous le signe somme"

$$d \left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx. \quad (5.5)$$

3. L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une certaine fonction F est la somme de cette fonction et d'une constante c

$$\int dF(x) = F(x) + c \quad \text{et} \quad d \left(\int dF(x) \right) = dF(x). \quad (5.6)$$

¹Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Il existe alors au moins un point $c \in [a, b]$ $a < c < b$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

5.2.1 Quelques primitives élémentaires

Dans la liste non exhaustive de primitives de fonctions usuelles ci-dessous c désigne une constante.

1.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \quad (\alpha \neq -1). \quad (5.7)$$

2.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c. \quad (5.8)$$

3.

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c. \quad (5.9)$$

4.

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c. \quad (5.10)$$

5.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c. \quad (5.11)$$

6.

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + c. \quad (5.12)$$

7.

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + c. \quad (5.13)$$

8.

$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + c. \quad (5.14)$$

9.

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + c. \quad (5.15)$$

10.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c; \quad a \in \mathbb{R}^+. \quad (5.16)$$

11.

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c; \quad a \neq 0. \quad (5.17)$$

12.

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c; \quad a \neq 0. \quad (5.18)$$

13.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c; \quad a \neq 0. \quad (5.19)$$

14.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c. \quad (5.20)$$

Il est facile de vérifier les égalités ci-dessous, il suffit de dériver les primitives.

5.2.2 Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie

Il est aisé de vérifier les propriétés ci-dessous. Il suffit de dériver chaque membre de l'égalité.

1. L'intégrale indéfinie de la somme de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ est la somme des intégrales indéfinies de chacune des fonctions.

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx. \quad (5.21)$$

2. On peut sortir un facteur constant sous le signe «somme». Soit a une constante.

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (5.22)$$

3. Il est parfois utile de se rappeler les règles suivantes :

- Si $\int f(x) dx = F(x) + c$ alors $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c$. En effet, on a d'une part

$$\left(\int f(ax) dx \right)' = f(ax)$$

et d'autre part,

$$\frac{1}{a} (F(ax))'_x = \frac{1}{a} F'(ax) \times a = F'(ax) = f(ax).$$

- on a :

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + c,$$

ou encore,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(x+b) + c.$$

5.2.3 Intégration par changement de variable

Soit à calculer l'intégrale

$$\int f(x) dx.$$

Nous supposons que cette intégrale existe. Effectuons le changement de variable suivant :

$$\varphi(t) = x,$$

où $\varphi(t)$ est une fonction continue ainsi que sa dérivée, et admettant une fonction inverse.

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad (5.23)$$

et dans ce cas,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Il est sous entendu que, dans l'intégrale du membre de droite de l'égalité ci-dessus, la variable t sera remplacée après intégration par son expression en fonction de x à l'aide de la fonction inverse de la fonction $\varphi(t)$. Pour justifier l'égalité de Eq. (5.23), il suffit de montrer que les dérivées des membres de gauche et droite sont égales. Il est à noter, une fois de plus, que les quantités (intégrales) considérées ne sont définies (indéfinies) qu'à une constante près. La dérivation du membre de gauche de Eq. (5.23) conduit à :

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

La dérivation du membre de droite conduit à :

$$\left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right]_x' = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \right]_t' \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

5.2.4 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions, on a alors la différentielle du produit uv suivante :

$$d(uv) = u dv + v du.$$

En intégrant, on trouve :

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

C'est ce l'on appelle «la formule de l'intégration par parties». On utilise cette formule pour l'intégration d'expressions pouvant être mises sous la forme d'un produit de deux facteurs u et dv dont la recherche de v est aisée. L'habileté requise pour le choix des deux facteurs u et dv nécessite une certaine expertise qui s'acquiert par la résolution de nombreux exercices.

5.3 Intégrale définie : intégrale de Riemann

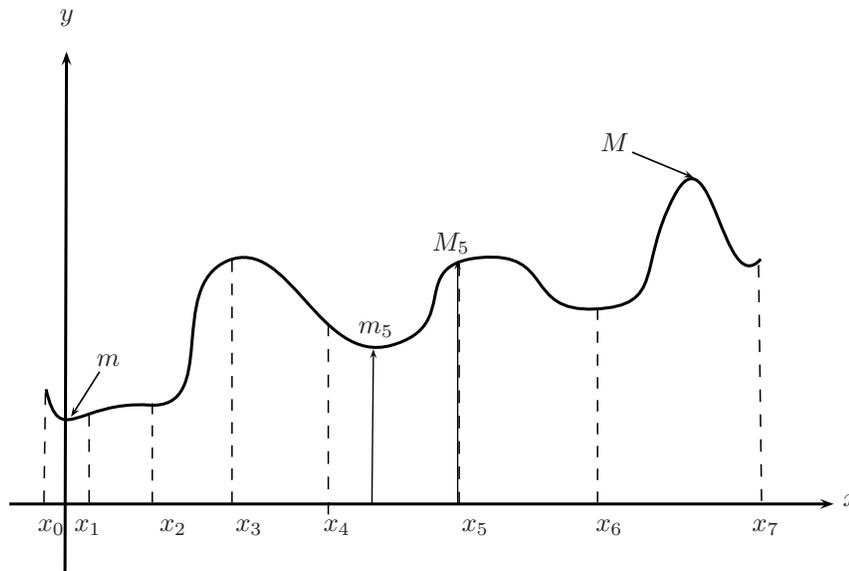


FIG. 5.1 – “Découpage” d’un intervalle en sous-intervalles.

Soit $y = f(x)$ une fonction continue donnée sur le segment $[a, b]$. Soient m et M sa plus petite et sa plus grande valeur sur le segment. On partage le segment $[a, b]$ en n parties délimitées par les points $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$. On pose $\Delta x_1 := x_1 - x_0, \dots, \Delta x_n := x_n - x_{n-1}$; On désigne par m_i (resp. M_i) la plus petite (resp. la plus grande) valeur de $f(x)$ sur le sous-intervalle $\Delta_i = \Delta x_i$ (cf. Fig. 5.1). On note respectivement S_n^- et S_n^+ les intégrales inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$

$$S_n^- = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i, \quad (5.24)$$

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \quad (5.25)$$

Remarque 5.3.1 1. Il est clair que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $m_i \geq m$, il s'ensuit :

$$S_n^- = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \geq m \sum_{i=1}^n \Delta_i = m(b-a). \quad (5.26)$$

2. De la même façon on a :

$$S_n^+ \leq M \sum_{i=1}^n \Delta_i = M(b-a).$$

3. De ce qui précède on a les inégalités suivantes :

$$m(b-a) \leq S_n^- \leq S_n^+ \leq M(b-a). \quad (5.27)$$

Considérons maintenant un point quelconque ξ_i sur chaque segment Δ_i

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 \cdots < \xi_n < x_n.$$

Soient $f(\xi_i)$ les valeurs de la fonction $f(x)$ aux points ξ_i . Formons ensuite la somme suivante :

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i. \quad (5.28)$$

On a évidemment les inégalités :

$$S_n^- \leq S_n \leq S_n^+$$

Cela provient des définitions de m_i et M_i et de la positivité de $\Delta_i = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$m_i \Delta_i \leq f(\xi_i) \Delta_i \leq M_i \Delta_i.$$

La somme S_n dépend du choix du découpage de l'intervalle $[a, b]$ ainsi que du choix des points ξ_i . Considérons divers découpages du segment $[a, b]$ tels que $\max(\Delta_i) \rightarrow 0$. Le nombre n de segments de tels découpages tend vers l'infini. Pour chaque découpage, on peut former la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$$

de sorte que nous puissions parler de découpages successifs et de la suite des sommes S_n . Supposons, que pour une suite de découpages donnée, avec $\max(\Delta_i) \rightarrow 0$, la somme S_n tende vers une limite I .

Définition 5.3.2 Si pour des découpages arbitraires du segment $[a, b]$ tels $\max \Delta_i \rightarrow 0$ et pour des points ξ_i quelconques la somme $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$ tend vers une seule et même limite I , on dit que la fonction $f(x)$ est intégrable sur le segment $[a, b]$. La limite I est appelée intégrale définie ou intégrale au sens de Riemann de la fonction $f(x)$ sur $[a, b]$. On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i, \quad (5.29)$$

où a est la borne inférieure, b la borne supérieure, x la variable d'intégration, $[a, b]$ l'intervalle d'intégration.

5.3.1 Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann

Les propriétés suivantes sont données sans démonstration.

1. Si la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$, elle est intégrable sur $[a, b]$.
2. Parmi les fonctions discontinues, on trouve aussi bien des fonctions intégrables que des fonctions non intégrables.
3. L'intégrale définie dépend seulement de la fonction $y = f(x)$ et des bornes d'intégration, mais non de la variable x . La variable x est dite *variable muette*.
4. si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ pour toute fonction $f(x)$.

5.

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx,$$

où α est une constante.

6.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Remarque 5.3.3 Ces deux propriétés subsistent même dans le cas où $a \geq b$. Ici, on suppose $a < b$. Soient deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ telles que $f(x) \leq \varphi(x)$ on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

m et M étant la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ sur le segment $[a, b]$; $a \leq b$.

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Cette propriété se déduit de la propriété précédente et du fait que $m \leq f(x) \leq M$.

7. **Théorème 5.3.4 (Théorème de la moyenne)** Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$, il existe sur $[a, b]$ un point ξ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi).$$

En effet, de la propriété précédente on a :

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Posons

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx.$$

Comme $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend donc toutes les valeurs comprises entre m et M . Il existe donc, un point ξ tel que $f(\xi) = \mu$. Par conséquent,

$$\mu = f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx.$$

8. Soient a, b, c trois nombres arbitraires, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

pourvu que ces trois intégrales existent.

5.3.2 Formule de Newton-Leibniz

Théorème 5.3.5 Soit $f(x)$ une fonction continue et on pose

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors $\varphi'(x) = f(x)$. Considérons un accroissement arbitraire Δx de la variable x :

$$\varphi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$$\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Appliquons à cette dernière intégrale le théorème de la moyenne.

$$\Delta\varphi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x,$$

avec ξ un point compris entre x et $x + \Delta x$. Il s'en suit :

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = f(\xi).$$

Par conséquent,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Remarque 5.3.6 Il résulte de ce théorème que toute fonction continue admet une primitive. En effet, si $f(t)$ est continue sur l'intervalle $[a, x]$ l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

existe et possède la propriété $\varphi'(x) = f(x)$. Autrement dit, φ est une primitive de la fonction f .

Théorème 5.3.7 (Formule de Newton-Leibniz) Soit $f(x)$ une fonction continue. Notons $F(x)$ la primitive de la fonction $f(x)$ on a alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cette formule est appelée «formule de Newton-Leibniz».

D'après le précédent théorème, $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f tout comme F . Ces deux primitives diffèrent l'une de l'autre par une constante C . On peut donc écrire

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Pour déterminer la valeur de la constante C , on pose d'abord $x = a$

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0,$$

d'où $C = -F(a)$. La formule de "Newton-Leibniz" se déduit en posant ensuite $x = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Remarque 5.3.8 *Il est courant de voir écrit ce qui suit*

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Il est à noter que l'évaluation de la différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F .

Cette formule, d'apparence anodine, a en réalité permis de se soustraire dans le calcul des intégrales, de l'évaluation des sommes S_n (évaluation pénible mais connue depuis l'antiquité) pour peu que nous disposions d'une primitive quelconque de la fonction à intégrer.

5.3.3 Changement de variable

Théorème 5.3.9 *Soit à intégrer la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. Nous supposons la fonction f continue sur $[a, b]$. On souhaite donc évaluer la quantité :*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Introduisons $x = \varphi(t)$ avec les propriétés suivantes

1. $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$;
2. φ et φ' continues sur $[\alpha, \beta]$;
3. $f[\varphi(t)]$ définie et continue sur $[\alpha, \beta]$.

On a alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (5.30)$$

Prenons une primitive quelconque de F de la fonction f à intégrer.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

et

$$\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

À l'aide de la formule de Newton-Leibniz on a successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt &= [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.3.4 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables on a :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

L'intégration sur l'intervalle $[a, b]$ de chaque membre de l'égalité ci-dessus conduit à :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

On peut réécrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Cette procédure d'intégration est appelée intégration par parties.

5.4 Extension de la notion d'intégrale

5.4.1 Intégrales avec les bornes infinies

Soit f une fonction continue pour tout x , $a \leq x < +\infty$. Considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx = I(b),$$

où b est réel ($b \geq a$). La continuité de la fonction f sur le demi-axe $[a, +\infty[$ donne un sens à l'intégrale $I(b)$ pour toute valeur de $b > a$. Quand b varie, l'intégrale $I(b)$ varie aussi. L'objet de cette section est d'étudier le comportement de $I(b)$ lorsque $b \rightarrow +\infty$.

Définition 5.4.1 Lorsque $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe, on note

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

On dit alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe et converge. Lorsque l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ n'a pas de limite finie lorsque $b \rightarrow +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ n'existe pas ou diverge.

On définit de la même manière les intégrales

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^a f(x)dx,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{-\alpha}^c f(x)dx + \int_c^{\alpha} f(x)dx \right\}.$$

Ci-dessous quelques théorèmes énoncés sans démonstration très utiles pour déterminer si une intégrale dont les bornes sont à l'infini existe ou non. L'utilisation de ces théorèmes est fort conseillé avant toute évaluation des intégrales proprement dites. Le choix des fonctions φ minorant ou majorant la fonction à intégrer f s'acquiert avec l'expérience et la résolution des exercices.

Théorème 5.4.2 Si pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a l'égalité $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, et si

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

converge alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge aussi et } \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Théorème 5.4.3 Si pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a l'égalité $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$, et si

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

diverge alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge aussi.}$$

Théorème 5.4.4 Si l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

converge, il en est de même pour l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Dans ce cas précis, l'intégrale est dite absolument convergente.

Lorsque $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ existe sans que $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ existe, on dit que la fonction f est semi-convergente. Ainsi la fonction $\frac{\sin x}{x}$ est-elle semi-convergente sur l'intervalle $[0, +, \infty[$.

5.4.2 Intégrale d'une fonction discontinue

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue pour $a \leq x < c$. Nous supposons la fonction f discontinue au point $x = c$. Dans ce cas, on ne peut pas définir $\int_a^c f(x) dx$ comme une limite de sommes intégrales puisque $f(x)$ n'est pas continue en $x = c$. Cependant on prolonge la définition de l'intégrale de f de la manière suivante :

Définition 5.4.5 L'intégrale d'une fonction f discontinue au point c et continue sur l'intervalle $[a, c[$ est définie par :

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c^-} \int_a^b f(x) dx.$$

Cette intégrale est dite convergente (membre de gauche) lorsque la limite du membre de droite existe, et est divergente dans le cas contraire. De la même manière, on peut étendre la définition de l'intégrale au cas d'une fonction discontinue au point $x = a$.

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a^+} \int_b^c f(x) dx.$$

Pour une fonction discontinue en un point $x = x_0$, $a < x_0 < c$, on a la définition

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx.$$

Il faut comprendre ici que l'intégrale $\int_a^c f(x) dx$ du membre de gauche existe si les intégrales du membre de droite existent au sens donné plus haut.

5.5 Intégrale multiple

5.5.1 Intégrale double

On considère dans le plan Oxy un domaine fermé D (c'est-à-dire un domaine délimité par une courbe fermée dont les points de la courbe sont dans D). On considère $z = f(x, y)$ définie sur D et continue. Comme pour l'intégrale à une dimension, partageons D en n domaines $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Sur chaque sous-domaine, choisissons un point P_i . Soient $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n)$ les valeurs de la fonction f aux points P_i . Formons maintenant la somme² V_n des produits $f(P_i)\Delta S_i$

$$V_n = f(P_1)\Delta S_1 + \dots + f(P_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i.$$

V_n est appelé somme intégrale de la fonction $f(x, y)$ sur le domaine D . Considérons une suite de sommes intégrales de f dans D pour divers découpages de D V_{n_1}, \dots, V_{n_k} . On supposera que le plus grand que les diamètres des sous-domaines S_i ($\text{Diam}(\Delta S_i)$) tend vers zéro lorsque $n_k \rightarrow +\infty$. f étant continue dans le domaine fermé D , la suite V_{n_k} a une limite lorsque le plus grand $\text{Diam}(\Delta S_i) \rightarrow 0$. Cette limite ne dépend ni du mode de découpage de D en sous-domaines partiels S_i ni du choix des points P_i dans S_i .

Définition 5.5.1 La limite de la suite des sommes intégrales V_{n_k} est appelée *intégrale double de f sur D* et on la désigne par

$$\iint_D f(P) \, dS, \text{ ou } \iint_D f(x, y) \, dx dy. \quad (5.32)$$

Plus précisément,

$$\lim_{\text{Diam}(\Delta S_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x, y) \, dx dy. \quad (5.33)$$

D est appelé *domaine d'intégration*. Si $f \geq 0$, cette intégrale représente le volume Q du corps limité par la surface $z = f(x, y)$, le plan $z = 0$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et qui s'appuient sur la frontière, ∂D , du domaine D .

Propriétés 5.5.2 1. L'intégrale double est linéaire. Soient deux fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ intégrables sur le domaine D .

$$\iint_D [\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y)] \, dx dy = \lambda_1 \iint_D f_1(x, y) \, dx dy + \lambda_2 \iint_D f_2(x, y) \, dx dy,$$

où λ_1 et λ_2 sont deux scalaires.

2. Si D est constitué de deux domaines D_1 et D_2 sans point intérieur commun et si f est continue sur D alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy$$

²Il faut faire attention aux notations utilisées ici. ΔS_i désigne une aire alors que plus haut ΔS_i désignait une sous-domaine de D , i.e. un ensemble de points.

5.5.2 Calcul des intégrales doubles

Nous allons dans la présente section décrire comment évaluer une intégrale double. Nous allons exposer cette évaluation à travers des exemples. Soit à calculer l'intégrale double suivante

$$I_D = \iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{x_2} f(x, y) \, dx dy, ,$$

avec

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \text{ et } D = [0, 1] \times [0, x_2].$$

Le calcul se fait de la manière suivante : on calcule d'abord $\int_0^{x_2} (x^2 + y^2) dy$. Le résultat sera une fonction de x .

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} (x^2 + y^2) dy &= x^2 [y]_0^{x_2} + \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{x_2} \\ &= x^2 x_2 + \frac{x_2^3}{3} \end{aligned}$$

On intègre ensuite le résultat par rapport à la variable x pour avoir la valeur de l'intégrale double I_D .

$$\begin{aligned} I_D &= x_2 \int_0^1 x^2 dx + \frac{x_2^3}{3} \int_0^1 dx \\ &= \frac{x_2}{3} + \frac{x_2^3}{3}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Reprenons la même fonction $f(x, y)$ mais à intégrer sur le domaine $D = [0, 1] \times [0, x]$. Cette exemple diffère du précédent par la borne d'intégration x_2 qui est maintenant égale à x . Dans les calculs précédents, on a considéré x_2 comme une constante dans l'évaluation des intégrales intermédiaires. Nous ne pouvons plus faire ainsi dans ce second exemple, car x est une variable d'intégration.

$$\begin{aligned} I_D &= \int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2 [y]_0^x dx + \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^x dx \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Propriétés 5.5.3 Si l'on divise D en sous n sous-domaines disjoints D_1, \dots, D_n alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

Soient m et M la plus petite et la plus grande valeur de f sur D . Soit S l'aire du domaine D . On a alors :

$$mS \leq \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq MS.$$

Il découle de l'inégalité précédente l'inégalité suivante :

$$m \leq \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq M.$$

5.5.3 Applications des intégrales doubles au calcul des volumes

Le volume V d'un corps limité par une surface $z = f(x, y)$ ($f \geq 0$), le plan $z = 0$ et la surface cylindrique de génératrices parallèles à Oz et dont la directrice est la frontière de D est donné par

$$V = \iint f(x, y) dS$$

Exemple 5.5.4 Calculons le volume du corps limité par les surfaces $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$ et $z = 0$. La représentation de ces courbes donne une visualisation du corps dont on souhaite calculé le volume. Il s'agit de calculer le volume d'une pyramide à base triangulaire.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Si le corps dont on cherche le volume est limité supérieurement par la surface $z = \varphi_2(x, y) \geq 0$ et inférieurement par la surface $z = \varphi_1(x, y) \leq 0$ alors

$$V = \iint_D \varphi_2(x, y) dx dy + \iint_D \varphi_1(x, y) dx dy ,$$

où D est la projection des deux surfaces sur le plan Oxy . Il est identique pour les deux surfaces $z = \varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$. Le cas de la fonction changeant de signe sur D se traite en partageant D sur des sous domaines D_1 et D_2 (sur D_1 la fonction $f \geq 0$ et sur D_2 $f \leq 0$). On additionne alors les deux volumes ainsi construits.

5.5.4 Applications des intégrales doubles au calcul des aires

Si l'on forme une somme intégrales pour la fonction $f(x, y) = 1$ définie sur D , on obtient l'aire

$$S = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta S_i$$

Passant à la limite, on a

$$S = \iint dx dy$$

qui représente l'aire du domaine D .

Exemple 5.5.5 Calculons l'aire délimitée par les courbes $y = 2 - x^2$ et $y = x$. Pour cela, déterminons d'abord les points d'intersection des ces courbes afin de définir le domaine D dont on souhaite calculer l'aire. Ces points d'intersection vérifient l'équation $x = 2 - x^2$ soit les zéros de l'équation $x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2) = 0$. Par conséquent, les deux points M_1 et M_2 d'intersection ont pour abscisses $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$ et pour ordonnées $y_1 = -2$ et $y_2 = 1$. L'aire S du domaine D délimité par les courbes $y = 2 - x^2$ et $y = x$ est donc

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (dy) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx \\ &= \frac{27}{6}. \end{aligned}$$

5.5.5 Changement de variables

Ce qui suit est aussi valable pour les intégrables triple, quadruple etc. . Soient $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$. Les applications φ et ψ sont supposées bijectives, continues et possédant des dérivées continues. On a alors

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(u, v) |\mathcal{J}| \, du dv,$$

où \mathcal{J} est le déterminant fonctionnel ou Jacobien.

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Exemple 5.5.6 *On souhaite évaluer l'intégrale*

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy,$$

où D est un disque centré de rayon ρ_0 . On souhaite évaluer l'intégrale en coordonnées polaires, c'est-à-dire utiliser le changement de variables suivant

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta = \varphi(\rho, \theta) \\ y &= \rho \sin \theta = \psi(\rho, \theta) \end{aligned} \tag{5.36}$$

Le calcul du Jacobien est aisé et conduit à $\mathcal{J} = \rho$. L'intégrale de f sur le disque devient :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} f_c(\rho, \theta) \rho \, d\rho d\theta$$

où f_c représente la fonction f mais exprimée en coordonnées polaires, i.e. telle que $f_c(\rho, \theta) = f(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$.

Il va sans dire que ce changement de variables est surtout intéressant lorsque l'on a affaire à une fonction radiale et que le domaine d'intégration est invariant par rotation. Dans ce cas, la fonction f_c ne dépend que de ρ . Ainsi en est-il de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ avec un domaine D_{R_0} qui est un disque de centre O et de rayon R_0 . Dans ce cas $f_c(\rho) = \rho^2$ et l'on a :

$$\iint_{D_{R_0}} f(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} f_c(\rho) \rho \, d\rho d\theta \tag{5.37}$$

$$= 2\pi \int_0^{R_0} \rho^3 \, d\rho \tag{5.38}$$

$$= 2\pi R_0^4. \tag{5.39}$$

Chapitre 6

Séries de Fourier

Sommaire

6.1	Préambule	53
6.2	Polynômes trigonométriques	54
6.2.1	Fonction périodique	54
6.2.2	Fonction exponentielle complexe	54
6.2.3	Fonction trigonométrique	55
6.2.4	Représentation en Sinus et Cosinus	55
6.2.5	Propriété d'orthogonalité	56
6.2.6	Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques	56
6.2.7	Égalité de Parseval	57
6.3	Séries de Fourier	57
6.3.1	Le cadre de l'espace $L^p_{\#}([0, T])$	58
6.3.2	Théorème fondamental	58
6.3.3	Approximation dans $L^2_{\#}([0, T])$	58
6.3.4	Théorème de Dirichlet	59
6.3.5	Quelques exemples de séries de Fourier	59
6.3.6	Analyse spectrale – Coefficients de Fourier	59
6.4	Un exemple d'utilisation	60
6.4.1	La corde vibrante fixée entre deux points : généralités	60
6.4.2	Cas de la corde pincée	63
6.4.3	Cas de la corde frappée	63
6.4.4	Comparaison entre les cordes pincées et les cordes frappées	64

6.1 Préambule

La Nature n'est pas avare d'exemples et en donnant son spectacle quotidien à nos ancêtres, Elle a su leur montrer que, derrière la richesse inouïe de ses apparats, il se cachait quelques lois simples. Il faut ici entendre le mot «loi» sous la forme approximative et archaïque suivante : ranger ensemble des phénomènes naturels non identiques que l'on peut relier par un critère quelconque. Il est probable que parmi ces premiers «rangements» ,l'Homme a su assez tôt dans son Histoire faire la distinction entre les évènements qui se répétaient de manière régulière (ou qui lui apparaissaient comme se répétant de manière régulière) et les autres. Ces phénomènes périodiques furent à l'origine des succès de l'Astronomie et de ce qui allait être la Physique et ils ont permis, entre autres, de faire des mesures de plus en plus précises du temps. Que l'on songe au gain en précision lorsque l'on est passé des

horloges ne mettant pas en jeu des phénomènes périodiques comme la clepsydre ou plus simplement encore la bougie (très en vogue au Moyen Âge dans les églises et les abbayes) à des horloges à balancier. Ces vieilles horloges qui hantent encore les salons de nos grands-parents prêtent à sourire et il semble qu'elles ne puissent pas soutenir la comparaison avec les montres modernes qui, pour certaines d'entre elles sont reliées à un satellite et qui ont une dérive inférieure à une seconde par siècle! Cependant ces balanciers sont à l'origine d'une découverte qui met en lumière les rapports intimes qu'il peut y avoir entre théorie et expérience. Par le truchement de l'esprit, prenons place sur un banc à la fin du XVI^e siècle, à Pise, à côté du jeune Galilée et observons en sa prestigieuse compagnie le mouvement d'un pendule. Le lecteur sait sans doute que, pourvu que l'on néglige les frottements, le balancier a une fréquence propre, c'est-à-dire qu'il oscille avec une fréquence indépendante de la façon dont on a initié le mouvement (conditions initiales) et qui, en l'occurrence, dépend de la longueur dudit pendule et de l'accélération de la pesanteur. Tout cela était évidemment inconnu à l'époque mais notre jeune et fougueux italien avait le pressentiment que le balancier effectuait un mouvement périodique. Mettre à l'épreuve sa théorie serait, aujourd'hui, un jeu d'enfant : il suffit de disposer d'une montre. Mais à l'époque Galilée ne disposait ni de montre ni d'horloge à balancier. Il dut donc se résoudre à observer le mouvement du balancier et mesurer la période en la comparant avec son rythme cardiaque. On frémit à l'idée que Galilée pût être atteint par des accès soudains de tachycardie ou bradycardie et l'on peut raisonnablement penser que la «foi» qu'il avait en sa théorie l'emportait sur tout autre considération fût elle expérimentale. Quoi qu'il en soit, ce que Galilée cherchait à mesurer est devenu en quelques décennies une mesure du temps. Et les horloges à balancier détrônèrent alors les horloges solaires, clepsydras et autres instruments de mesure du temps.

Le lecteur, maintenant persuadé de l'importance des phénomènes périodiques a probablement maintenant hâte de rentrer dans le vif du sujet et de se livrer à son exercice favori : la manipulation d'objets mathématiques.

6.2 Polynômes trigonométriques

6.2.1 Fonction périodique

Une fonction f est dite périodique de période T (ou T -périodique) si et seulement si :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad : f(t+T) = f(t) \quad (6.1)$$

Remarque 6.2.1 Si T est une période de la fonction f , les quantités $2T, \dots, NT$ sont aussi des périodes : par conséquent, il existe une infinité de périodes. En général, ce que l'on appelle **la période**, (appelée par la suite T) est le plus petit élément non nul (s'il existe!) de l'ensemble **des périodes**.

6.2.2 Fonction exponentielle complexe

La fonction $\varphi_n(t) = \exp\left(\frac{2i\pi nt}{T}\right)$ ¹ étant de période T , il en est de même pour toute combinaison linéaire des $\varphi_n(t)$:

$$p(t) = \sum_{n \in I} c_n \varphi_n(t), \text{ avec } \text{card}(I) < +\infty \text{ et } c_n \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

¹Nous verrons un peu plus loin le statut particulier de la fonction exponentielle complexe.

L'ensemble I étant fini, on peut supposer que $p(t)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n(t). \quad (6.3)$$

6.2.3 Fonction trigonométrique

La fonction $p_N(t)$ définie en (6.3) est alors appelée polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N . Et nous noterons, par la suite, \mathcal{T}_N^T l'ensemble de ces polynômes.

Il arrive assez souvent, dans la pratique, que ces polynômes soient réels. Dans ce cas, on a :

$$p_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n(t) \quad (6.4)$$

soit

$$p_N^*(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n^* \varphi_n^*(t) \quad (6.5)$$

or $\varphi_n^* = \varphi_{-n}$, d'où :

$$p_N^* = \sum_{n=-N}^N c_n^* \varphi_{-n}(t) = \sum_{n'=-N}^{+N} c_{-n'}^* \varphi_{n'}(t) \quad (6.6)$$

Comme on a $p_N = p_N^*$ pour tout t , on obtient l'égalité ² :

$$c_n^* = c_{-n} \quad (6.7)$$

pour tout n dans $[-N, +N]$. Cette dernière égalité qui traduit la symétrie hermitienne des coefficients du polynôme trigonométrique montre que si l'on connaît les coefficients à indice positif, on peut déduire le polynôme trigonométrique.

6.2.4 Représentation en Sinus et Cosinus

L'égalité (6.3) peut s'exprimer en fonction des fonctions sinus et cosinus :

$$\begin{aligned} p_N(t) &= \sum_{n=-N}^{+N} c_n \left(\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+N} c_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=-N}^{-1} c_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ &\quad + i \sum_{n=1}^{+N} c_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + i \sum_{n=-N}^{-1} c_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+N} (c_n + c_{-n}) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{+N} i (c_n - c_{-n}) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{aligned}$$

²Ce résultat sous-entend que l'on a l'implication suivante :

$$p_N(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies c_n = 0, \quad \forall n \in [-N, N]$$

Nous verrons un peu plus loin que c'est bien le cas.

On obtient alors :

$$p_N(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+N} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{+N} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (6.8)$$

avec pour tout n dans $[0, N]$

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

Et inversement :

$$\begin{aligned} c_n &= (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} &= (a_n + ib_n)/2 \end{aligned}$$

Si de plus le polynôme $p_N(t)$ est une fonction réelle l'égalité (6.7) conduit à :

$$\begin{aligned} a_n &= 2\Re\{c_n\} \\ b_n &= -2\Im\{c_n\} \end{aligned}$$

pour tout n dans $[0, N]$.

6.2.5 Propriété d'orthogonalité

Un calcul simple montre que l'on a la propriété suivante :

$$\int_0^T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \delta_{m,n} T. \quad (6.9)$$

Cette propriété fondamentale nous conduit à munir l'espace des polynômes trigonométriques de période T et de degré inférieur à N , \mathcal{T}_N^T du produit scalaire suivant :

$$\langle p, q \rangle = \int_0^T pq^* dt. \quad (6.10)$$

6.2.6 Coefficients de Fourier des polynômes trigonométriques

L'égalité (6.9) qui traduit l'orthogonalité des fonctions φ_n au sens du produit scalaire défini plus haut (6.10), nous permet d'établir très simplement des propriétés fondamentales :

$$\langle p_N, \varphi_m \rangle = \left\langle \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n, \varphi_m \right\rangle = \sum_{n=-N}^{+N} c_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \sum_{n=-N}^{+N} c_n T \delta_{n,m} = c_m T \quad (6.11)$$

d'où :

$$c_m = \frac{1}{T} \langle p_N, \varphi_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_N e^{-\frac{2i\pi mt}{T}} dt, \quad \forall m \in [-N, N]. \quad (6.12)$$

Remarque 6.2.2 Si $p_N(t) = 0$ pour tout t , l'égalité écrite ci-dessus conduit à $c_m = 0, \forall m \in [-N, N]$.

Avec les coefficients a_m et b_m , on obtiendrait :

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T p_N \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \quad \text{et} \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T p_N \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \quad \forall m \in [0, N]. \quad (6.13)$$

On a ainsi résolu le problème d'**Analyse Spectrale**³ d'une fonction trigonométrique : connaissant la fonction p_N , calculer les coefficients c_m de son développement en exponentielles complexes.

6.2.7 Égalité de Parseval

Enfin la propriété d'orthogonalité conduit à un autre résultat très important concernant le produit scalaire de deux polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned} \langle p_N, q_N \rangle &= \left\langle \sum_{n=-N}^{+N} c_n \varphi_n, \sum_{m=-N}^{+N} d_m \varphi_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-N}^{+N} c_n d_m^* \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-N}^{+N} c_n d_m^* T \delta_{n,m} \\ &= T \sum_{n=-N}^{+N} c_n d_n^* \end{aligned}$$

Ce résultat est connu sous le nom d'**égalité de Parseval**. Un cas particulièrement intéressant s'obtient pour $p_N = q_N$:

$$\sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \|p_N\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |p_N|^2 dt. \quad (6.14)$$

6.3 Séries de Fourier

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de généraliser les résultats obtenus dans le paragraphe précédent à une classe de fonctions périodiques beaucoup plus vaste que l'espace des polynômes trigonométriques. La question fondamentale est alors :

toute fonction T -périodique ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) peut-elle se décomposer en une somme de Fourier i.e. $\forall t \in [0, T] \quad f(t) = \sum_{n \in I} f_n e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$?

La réponse est bien évidemment négative si l'ensemble I est un ensemble fini (somme finie). Il suffit pour cela de constater que lorsque I est un ensemble fini, le terme de droite est indéfiniment dérivable et que le terme de gauche n'a *a priori* aucune raison de l'être. Dans un mémoire en 1807, Joseph Fourier affirma que la réponse devait être positive pourvu que la somme \sum soit en fait une série c'est-à-dire pour laquelle $I = \mathbb{Z}$.

³Nous verrons un peu plus loin une justification de ce vocabulaire curieux

6.3.1 Le cadre de l'espace $L^p_{\#}([0, T])$

$$L^p_{\#}([0, T]) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, f \text{ est } T\text{-périodique} / \int_0^T |f(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

6.3.2 Théorème fondamental

On admettra le théorème fondamental suivant :

Si f est une fonction de $L^2_{\#}([0, T])$ et soit $f_N = \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$ avec $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f e^{-\frac{2i\pi n t}{T}} dt$, alors $\int_0^T |f - f_N|^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0^4$.

6.3.3 Approximation dans $L^2_{\#}([0, T])$.

Soit f une fonction de $L^2_{\#}([0, T])$ et soit p_N un élément de \mathcal{T}_N^T , on peut alors écrire $p_N = \sum_{n=-N}^{+N} x_n \varphi_n$. Nous allons chercher à approximer une fonction périodique quelconque (il faut qu'elle soit quand même dans $L^2_{\#}([0, T])$!) par un polynôme de degré N . En d'autres termes, on se demande si l'on peut trouver les coefficients $\{x_n\}$ telles que le reste $r_N = f - p_N$ soit le plus petit possible au sens de $L^2_{\#}([0, T])$ i.e. telles que $\|r_N\|_{L^2_{\#}([0, T])}^2$ soit le plus petit possible ?

On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \|r_N\|^2 &= \langle f - p_N, f - p_N \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|p_N\|^2 - \langle f, p_N \rangle - \langle p_N, f \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|p_N\|^2 - 2\Re \{ \langle f, p_N \rangle \} \end{aligned}$$

Or $\|p_N\|^2 = T \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2$ et $\langle f, p_N \rangle = \left\langle f, \sum_{n=-N}^{+N} x_n \varphi_n \right\rangle = \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* \langle f, \varphi_n \rangle$ avec $\langle f, \varphi_n^* \rangle = \int_0^T f \varphi_n dt = T c_n(f)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \|r_N\|^2 &= \|f\|^2 + T \sum_{n=-N}^{+N} |x_n|^2 - 2\Re \{ \sum_{n=-N}^{+N} x_n^* c_n(f) \} \\ &= \|f\|^2 + T \sum_{n=-N}^{+N} |x_n - c_n(f)|^2 - |c_n(f)|^2 \\ &= \|f\|^2 - T \sum_{n=-N}^{+N} |c_n(f)|^2 + T \sum_{n=-N}^{+N} |x_n - c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

Pour que $\|r_N\|^2$ soit le plus petit possible, il faut donc que le dernier terme soit nul i.e. que pour tout n dans $[-N, +N]$, on ait l'égalité $x_n = c_n(f)$. Par ailleurs, on peut établir que le reste r_N est orthogonal à toute fonction φ_k (i.e. $\langle r_N, \varphi_k \rangle = 0$). On a, en effet :

⁴ On note parfois : $\|f_N - f\|_{L^2_{\#}([0, T])}^2 \longrightarrow 0$ ou même $f_N \xrightarrow{L^2_{\#}([0, T])} f$ (lire f_N converge vers f au sens de $L^2_{\#}([0, T])$)

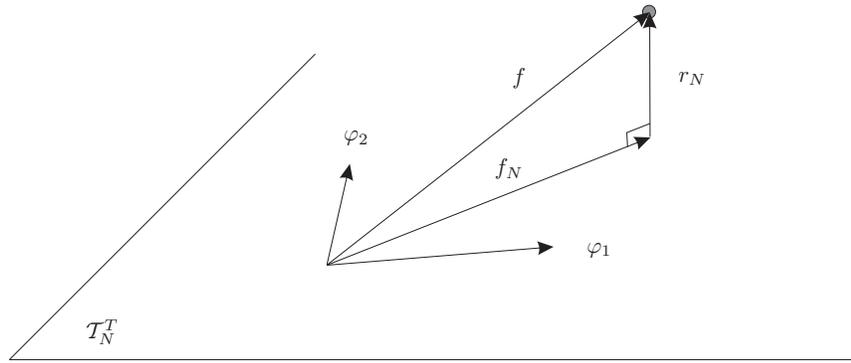


FIG. 6.1 – Interprétation géométrique

$$\begin{aligned}
 \langle r_N, \varphi_k \rangle &= \left\langle f - \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(f) \varphi_n, \varphi_k \right\rangle \\
 &= \underbrace{\langle f, \varphi_k \rangle}_{T c_k(f)} - \sum_{n=-N}^{n=+N} c_n(f) \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle}_{T \delta_{n,k}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

6.3.4 Théorème de Dirichlet

Il s'agit maintenant de répondre à la question suivante : *dans quelle mesure peut-on affirmer que pour un point t donné $f_N(t)$ converge (convergence ponctuelle) vers $f(t)$?* Voici l'énoncé du théorème de Dirichlet (ou théorème de la convergence ponctuelle).

Théorème 6.3.1 *Soit f une fonction de $L^1_{\#}([0, T])$, si en un point t_0 les limites $f(t_{0+})$ et $f(t_{0-})$ existent de même que $f'(t_{0+})$ et $f'(t_{0-})$ alors on a le résultat suivant :*

$$f_N(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(t_{0+}) + f(t_{0-}))$$

Corollaire 6.3.2 *En outre si f est continue alors on a la convergence ponctuelle à savoir $f_N(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(t_0)$.*

Corollaire 6.3.3 *Si f est continue partout : alors on peut écrire l'égalité : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2i\pi n t}{T}}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f .*

6.3.5 Quelques exemples de séries de Fourier

Ces exemples seront abordés à l'occasion de séances de Travaux Dirigés.

6.3.6 Analyse spectrale – Coefficients de Fourier

Considérons un système physique où l'on peut définir une «fonction d'entrée» x de la variable t (le temps, par exemple) et une «fonction de sortie» y de la même variable. Nous supposons qu'il existe un opérateur A tel que l'on peut écrire :

$$y(t) = A(x(t)). \quad (6.15)$$

La «fonction d'entrée» étant donnée, la question est maintenant de savoir déterminer simplement la «fonction de sortie». Bien entendu, si l'on n'a aucune idée sur l'opérateur A , il paraît difficile, voire impossible de répondre à une telle question. Nous allons supposer que A a les trois propriétés suivantes.

1. A est un opérateur linéaire.
2. A est un opérateur continu. Autrement dit, si $X_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} X$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(X_k) = A(X). \quad (6.16)$$

(On peut inverser la limite et l'opérateur A).

3. A commute avec tout opérateur de translation dans le temps i.e. si $y(t) = A(x(t))$ alors $y(t - t_0) = A(x(t - t_0))$, pour tout t_0 élément de \mathbb{R} .

L'opérateur est dit alors **filtre linéaire et continu**. On suppose maintenant, pour simplifier que x est une fonction périodique et continue, de sorte que l'on peut écrire :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_n(t). \quad (6.17)$$

En vertu des propriétés 1 et 2, on peut alors écrire :

$$y(t) = A\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_n(t)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n y_n(t), \quad (6.18)$$

avec $y_n(t) = A(\varphi_n(t))$. La propriété 3 et cette dernière égalité nous conduisent alors à :

$$y_n(t + u) = A(\varphi_n(t + u)). \quad (6.19)$$

Cette dernière égalité serait sans intérêt si l'on ne tenait pas compte du statut privilégié –un de plus– de la fonction exponentielle complexe. En effet, on a :

$$\varphi_n(t + u) = \varphi_n(u) \varphi_n(t), \quad (6.20)$$

qui nous conduit à

$$y_n(t + u) = \varphi_n(u) A(\varphi_n(t)), \quad (6.21)$$

égalité qui pour, $t = 0$, s'écrit comme suit

$$y_n(u) = \lambda_n \varphi_n(u), \quad (6.22)$$

avec $\lambda_n = A(\varphi_n(0))$. En définitive, on obtient :

$$A(\varphi_n(u)) = \lambda_n \varphi_n(u) \quad (6.23)$$

La fonction φ_n apparaît alors comme une fonction propre de l'opérateur A associée à la valeur propre λ_n . On dit alors que $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ constitue le **spectre ponctuel** de l'opérateur A , ce qui justifie *a posteriori* le terme d'Analyse spectrale. Une fois que l'on a calculé les coefficients $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ le problème est alors entièrement résolu puisque l'on a :

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \lambda_n \varphi_n(t). \quad (6.24)$$

6.4 Un exemple d'utilisation des séries de Fourier : la corde vibrante

6.4.1 La corde vibrante fixée entre deux points : généralités

Une corde de longueur L et de masse linéique λ est tendue entre deux points A et B avec une tension supposée constante T tout le long de ladite corde. On se propose d'étudier les petites oscillations de cette corde à partir de deux types de

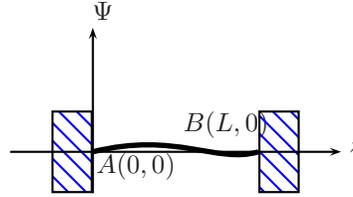
conditions initiales –type corde pincée (guitare, clavecin, . . .) et type corde frappée (piano, . . .)– que l’on précisera ultérieurement. La forme de la corde est entièrement déterminée par la fonction Ψ des deux variables z et t (cf. figure (6.2)). Cette fonction est solution de l’équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (6.25)$$

avec $c = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$ et doit vérifier les deux conditions aux limites $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$.

L’énoncé de ce problème est encore incomplet : il nous faut encore donner la forme ainsi que la vitesse de la corde en tout point, à un instant donné. Sans perte de généralité, nous pouvons nous donner ces conditions initiales à l’instant $t = 0$. Nous exprimons mathématiquement ces deux conditions en se donnant *a priori* deux fonctions f et g telles que :

$$\Psi(z, 0) = f(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(z, 0) = g(z). \quad (6.26)$$



Nous pouvons maintenant nous atteler à la tâche. Pour cela, nous allons considérer que Ψ est la restriction sur l’intervalle $[0, L]$ d’une fonction $\tilde{\Psi}$ définie sur \mathbb{R} . Cette fonction $\tilde{\Psi}$ est périodique en z , de période $2L$ et impaire, de sorte que l’on peut écrire :

FIG. 6.2 – Corde vibrante : flash à l’instant t .

$$\tilde{\Psi} = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p(t) \sin(K_p z), \quad (6.27)$$

avec $K_p \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{p\pi}{L}$. La fonction $\tilde{\Psi}$, comme Ψ , étant solution de l’équation des ondes, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left(-K_p^2 \Phi_p(t) - \frac{1}{c^2} \Phi_p''(t) \right) \sin(K_p z) = 0, \quad (6.28)$$

si l’on a supposé au préalable que l’on a le droit d’intervertir les dérivées partielles et les sommes infinies. Cela signifie, que pour toute valeur de p , on a l’égalité :

$$-K_p^2 \Phi_p(t) - \frac{1}{c^2} \Phi_p''(t) = 0 \quad (6.29)$$

i.e. en posant $\omega_p \stackrel{\text{déf}}{=} cK_p$, $\Phi_p''(t) + \omega_p^2 \Phi_p(t) = 0$. Cette dernière équation différentielle a une solution bien connue qui est

$$\Phi_p(t) = A_p \cos(\omega_p t) + B_p \sin(\omega_p t). \quad (6.30)$$

En remplaçant dans l’égalité (6.27) la fonction Φ_p par cette expression, on trouve l’égalité :

$$\tilde{\Psi} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(A_p \cos(\omega_p t) + B_p \sin(\omega_p t) \right) \sin(K_p z). \quad (6.31)$$

Remarque 6.4.1 *L’idée de la méthode consiste à remplacer l’étude de la fonction Ψ , solution d’une équation différentielle avec des «conditions aux bords», par l’étude d’une fonction périodique ayant une «certaine régularité», solution de la même équation différentielle.*

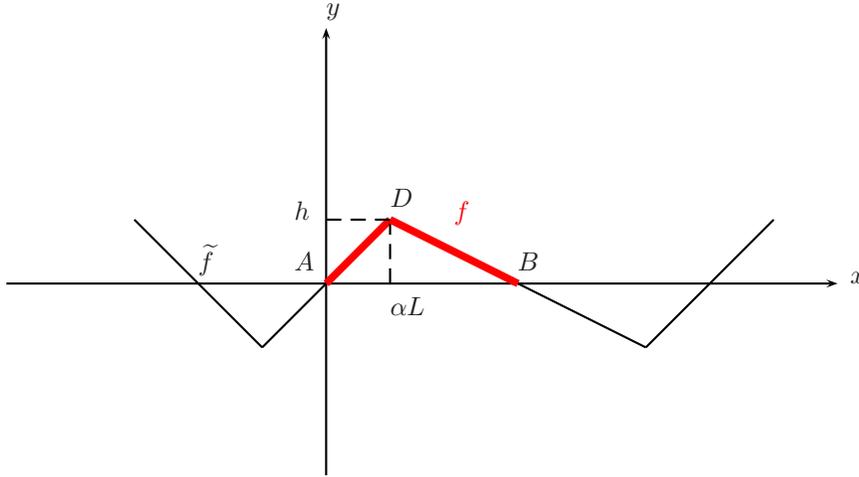


FIG. 6.3 – Graphe des fonctions f et \tilde{f} ($0 < \alpha < 1$).

Remarque 6.4.2 Par la suite, on ne distinguera plus toujours la fonction définie sur tout \mathbb{R} , $\tilde{\Psi}$, et sa restriction Ψ .

Il nous reste maintenant à déterminer les constantes $\{A_p\}_{p=1,+\infty}$ et $\{B_p\}_{p=1,+\infty}$ en fonction de f et g . Pour cela il suffit de considérer la fonction \tilde{f} (resp. \tilde{g}) qui est impaire et $2L$ -périodique et dont la restriction à $[0, L]$ est f (resp. g). On a alors :

$$\tilde{f} = \sum_{p=1}^{+\infty} f_p \sin(K_p z) \quad \text{et} \quad \tilde{g} = \sum_{p=1}^{+\infty} g_p \sin(K_p z). \quad (6.32)$$

Il suffit alors d'égaliser d'une part $\tilde{\Psi}(z, 0)$ et \tilde{f} et d'autre part $\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}(z, 0)$ et \tilde{g} , soit :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} A_p \sin(K_p z) = \sum_{p=1}^{+\infty} f_p \sin(K_p z) \quad (6.33)$$

et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} B_p \omega_p \sin(K_p z) = \sum_{p=1}^{+\infty} g_p \sin(K_p z) \quad (6.34)$$

ce qui conduit immédiatement à

$$A_p = f_p \quad \text{et} \quad B_p = \frac{g_p}{\omega_p}. \quad (6.35)$$

On a donc en définitive :

$$\Psi(z, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(f_p \cos(\omega_p t) + \frac{g_p}{\omega_p} \sin(\omega_p t) \right) \sin(K_p z). \quad (6.36)$$

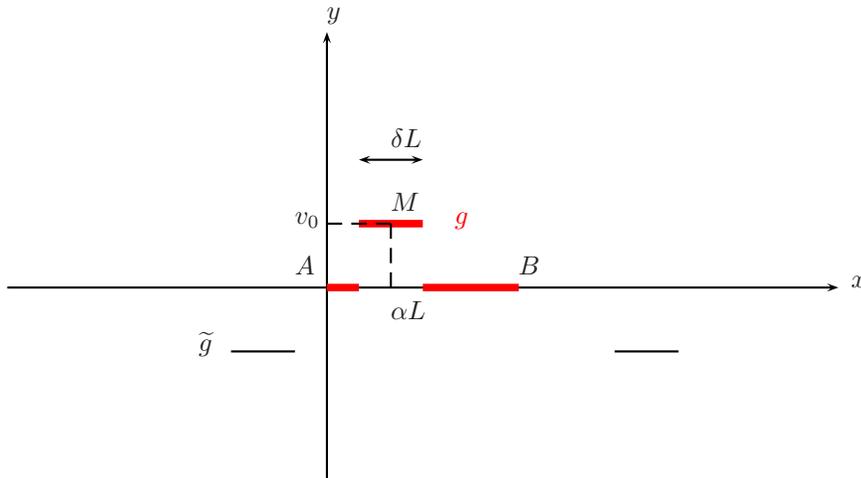


FIG. 6.4 – Graphe des fonctions g et \tilde{g} ($0 < \alpha < 1$, $0 < \delta < \min(2\alpha, 2(1 - \alpha))$).

6.4.2 Cas de la corde pincée

On suppose qu'à l'instant initial la corde a l'allure donnée à la figure (6.3). La fonction f introduite au paragraphe précédent est alors donnée par⁵ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{\alpha L} & , \text{ si } 0 < x < \alpha L \\ \frac{h(x-L)}{(\alpha-1)L} & , \text{ si } \alpha L < x < L \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (6.37)$$

où α est un paramètre tel que $0 < \alpha < 1$. Par ailleurs, on définit sa «périodisée» \tilde{f} comme suit⁶ :

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - 2kl) - f(-x + 2kl). \quad (6.38)$$

Enfin, on considère qu'à l'instant $t = 0$ la corde est sans vitesse initiale de sorte que $\tilde{g} = 0$. Le lecteur montrera à titre d'exercice que :

$$f_p = C_\alpha \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2}, \text{ avec } C_\alpha = \frac{2h}{\pi^2\alpha(1-\alpha)} \text{ et } g_p = 0. \quad (6.39)$$

ce qui nous conduit à :

$$\Psi(z, t) = C_\alpha \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2} \cos(\omega_p t) \sin(K_p z). \quad (6.40)$$

6.4.3 Cas de la corde frappée

Dans ce cas là, on suppose que la corde, à l'instant $t = 0$ a l'allure de la corde au repos cependant que la vitesse de la corde au même instant est décrite par la fonction g représentée à la figure (6.4). De la même façon que précédemment on

⁵On notera que la fonction f est bien continue.

⁶Le lecteur vérifiera sans peine que cette fonction ainsi définie est bien impaire et $2L$ -périodique et que f est bien la restriction à $[0, L]$

construit la «périodisée» de g de la manière suivante :

$$\tilde{g} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(x - 2kl) - g(-x + 2kl) \quad (6.41)$$

Dans ce cas, le lecteur doit trouver :

$$g_p = \frac{C'}{p} \sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right) \sin(p\pi\alpha), \quad (6.42)$$

avec $C' = \frac{4v_0}{\pi}$, ce qui nous conduit à :

$$\Psi(z, t) = C' \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right) \sin(p\pi\alpha)}{p\omega_p} \sin(\omega_p t) \sin(K_p z). \quad (6.43)$$

Or, on a l'égalité $\omega_p = K_p c = \frac{p\pi c}{L}$ qui donne immédiatement :

$$\Psi(z, t) = \frac{C' L}{c\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right) \sin(p\pi\alpha)}{p^2} \sin(\omega_p t) \sin(K_p z). \quad (6.44)$$

6.4.4 Comparaison entre les cordes pincées et les cordes frappées

Imaginons un instant que dans les deux cas nous ayons affaire à la même corde de sorte que les pulsations temporelles $\{\omega_p\}_{p=1,+\infty}$ et les pulsations spatiales $\{K_p\}_{p=1,+\infty}$ soient les mêmes dans les deux cas. On a alors avec des notations qui parlent d'elles-mêmes :

$$\Psi^P = \sum_{p=1}^{+\infty} \Psi_p^P = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(K_p z) \cos(\omega_p t) \quad \text{avec} \quad a_p = C_\alpha \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2} \quad (6.45)$$

et

$$\Psi^F = \sum_{p=1}^{+\infty} \Psi_p^F = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(K_p z) \sin(\omega_p t) \quad \text{avec} \quad b_p = \frac{C' L}{c\pi} \frac{\sin(p\pi\alpha) \sin\left(\frac{p\pi\delta}{2}\right)}{p^2}. \quad (6.46)$$

Il faut donc interpréter ces résultats de la manière suivante. Si l'on admet que les cordes étudiées sont dans l'air, milieu capable de véhiculer le son, alors le son émis par ces cordes peut être décomposé en sons purs de fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$. Une corde peut donc être assimilée à une infinité de diapasons de fréquences f_p multiples de la fréquence f_1 qui est appelée **fréquence fondamentale**. Il s'agit maintenant d'étudier l'amplitude associée à chacun de ces diapasons, amplitude donnée par a_p pour la corde pincée (resp. b_p pour la corde frappée). On va supposer maintenant qu'on n'entende que les huit premières harmoniques : f_1 jusqu'à $8f_1$ (nous verrons plus loin que c'est licite). Nous avons alors le tableau suivant :

f_1	$2f_1$	$3f_1$	$4f_1$	$5f_1$	$6f_1$	$7f_1$	$8f_1$
f_1	$2f_1$	f_2	$4f_1$	f_3	$2f_2$	f_4	$8f_1$

Il apparaît alors quatre fréquences f_1 , f_2 , f_3 et f_4 (appelées notes en Musique) différentes ainsi que ces mêmes notes une ou plusieurs octaves au-dessus ($2f_1, 4f_1, 8f_1$) et ($2f_2$). Or les fréquences f_2 et f_3 correspondent en réalité respectivement à la quinte et à la tierce. Si donc on veut éliminer la fréquence f_4 qui «frotte»

au moins pour nos oreilles d'occidentaux (cette note correspond au $S_{i_{b3}}$), il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{7}$ de sorte que l'on annule les termes $a_7, a'_7, a_{14}, a'_{14}$, etc ... Par ailleurs, si l'on choisit δ petit – que l'on songe à la taille du marteau d'un piano par rapport à celle de la corde – alors pour les harmoniques basses (p petit) on a pd petit, ce qui nous permet d'écrire :

$$b_p \simeq \frac{C'L\delta}{2c} \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p} \quad (6.47)$$

et

$$a_p = C_\alpha \frac{\sin(p\pi\alpha)}{p^2} \quad (6.48)$$

On constate alors que, pour les harmoniques audibles (harmoniques basses), on a une décroissance plus rapide de l'amplitude de ces harmoniques pour les cordes pincées que pour les cordes frappées. À titre d'exemple, on donne le tableau suivant avec $\alpha = \frac{1}{7}$ et $\delta = \frac{1}{20}$.

p	1	2	3	4	5	6	7	8
a_p/a_1	1.000	0.4505	0.2497	0.1404	0.0721	0.0278	0.000	-0.0156
b_p/b_1	1.000	0.8992	0.7428	0.5531	0.3516	0.1607	0.000	-0.1171

Conclusion 6.4.3 *Si l'on s'intéresse à la gamme dite juste (gamme du physicien) et si l'on prend comme fréquence fondamentale $f_1 = 256$ Hz (correspondant à $p = 1$ dans le développement en série de Fourier), on a alors l'émission de la note Do (appelé Do_3). Dans cette gamme, les fréquences $2f_1, 3f_1, 4f_1, 5f_1$ et $6f_1$ correspondent alors respectivement au Do_4, Sol_4, Do_5, Mi_5 et Sol_6 . D'autre part, si l'on accepte (ce qui est un modèle simpliste) que l'oreille soit un récepteur quadratique, le mélomane «entendra» une superposition de sons purs avec une énergie proportionnelle au carré des coefficients de Fourier. Enfin, si l'on considère que l'on peut distinguer un son (au milieu d'autres sons) si son énergie est supérieure à 5% du son correspondant au son le plus énergétique (généralement, correspondant à la note fondamentale), on constate que l'on n'entend que le Do_3 , le Do_4 et le Sol_4 (octave et une quinte) dans le cas de la corde pincée, alors que l'on entend le Do_3 , Do_4 , Sol_4 , Do_5 et Mi_5 (qui fait apparaître l'accord de Do majeur – une tierce et une quinte justes) dans le cas de la corde frappée.*

On peut ainsi peut-être expliquer pourquoi à la fin du XVIII^e siècle le piano, alors appelé piano forte a progressivement détrôné le clavecin ...

Remarque 6.4.4 *On pourrait, à juste titre, émettre quelques réserves concernant les conclusions tirées plus haut. Le mélomane averti ne peut pas croire que le son émis par une guitare, une mandoline ou une harpe soit si pauvre que l'on n'entende que trois sons purs. La réalité est évidemment plus subtile car nous avons omis soigneusement de parler de la caisse de résonance, caisse sans laquelle on n'entendrait qu'un son effectivement extrêmement pauvre et faible. Il s'avère que le son émis par la corde excite les très nombreuses fréquences propres de la caisse de résonance. Il faut de nouveau considérer la caisse de résonance de la guitare, par exemple, comme une assemblée de diapasons pouvant avoir des fréquences propres très voisines. Ainsi, si un guitariste gratte la corde de Sol_4 (note fondamentale inaudible en pratique), il excitera les fréquences de résonance de la caisse préférentiellement autour du Sol_4 (notes audibles). Ces fréquences de la caisse déterminent le timbre de l'instrument et enrichit le son extrêmement pauvre de la corde seule. Toutefois, ces réserves étant émises, il reste que la conclusion tirée plus haut demeure.*

Chapitre 7

Transformation de Fourier des fonctions sommables

Sommaire

7.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$	67
7.2	Définition de la transformée de Fourier d'une fonction sommable	68
7.3	Transformée de Fourier inverse	68
7.4	Exemples de transformée de Fourier	68
7.4.1	Transformée de Fourier la fonction porte Π .	68
7.4.2	Transformée de Fourier de la fonction gaussienne	69
7.4.3	Transformée de Fourier de la fonction $\exp(- x)$	69
7.5	Quelques propriétés des transformées de Fourier	70
7.5.1	Linéarité de la Transformée de Fourier	70
7.5.2	Transformée de Fourier des fonctions réelles	70
7.5.3	Changement d'échelle	70
7.5.4	Parité	71
7.5.5	Translation	71
7.5.6	Modulation	71
7.5.7	Dérivation	71
7.5.8	Théorème de Parseval-Plancherel	71
7.6	Transformation de Fourier bidimensionnelle	72
7.6.1	Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$	72
7.6.2	Définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction sommable	72
7.6.3	Transformée de Fourier d'une fonction radiale	72

Dans ce chapitre, nous allons étendre la plupart des résultats obtenus pour les séries de Fourier en remarquant qu'une fonction quelconque (pourvue de qualités décentes) est *grosso modo* une fonction périodique dont la période est infinie. Il s'agit alors très grossièrement de remplacer une somme discrète \sum par une intégrale \int .

7.1 Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R})$

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , f est élément de $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} |f| dx < +\infty$. On dit alors que la fonction est *sommable*.

7.2 Définition de la transformée de Fourier d'une fonction sommable

Étant donnée une fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f , notée $\mathfrak{F}^-(f)$ ou \hat{f} de la manière suivante :

$$\mathfrak{F}^-(f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (7.1)$$

Remarque 7.2.1 Il arrive parfois que l'on rencontre d'autres définitions pour la transformée de Fourier comme :

$$\mathfrak{F}^+(f)(\nu) = \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{+2i\pi\nu x} dx \quad (7.2)$$

Par ailleurs, la présence du coefficient 2π dans l'exposant est conventionnelle et permet d'avoir une formule de réciprocity particulièrement simple. On voit aussi, parfois, en Physique, les transformées de Fourier suivantes :

$$\mathfrak{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (7.3)$$

ou bien en Physique Quantique

$$\mathfrak{F}(\Psi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx \quad (7.4)$$

Remarque 7.2.2 L'égalité 7.1 a bien un sens puisque l'on a les inégalités suivantes :

$$|\hat{f}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2i\pi\nu x}| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty \quad (7.5)$$

7.3 Transformée de Fourier inverse

La question est maintenant de savoir si à partir de la connaissance de la transformée de Fourier d'une fonction (son équivalent pour les fonctions périodiques étant la connaissance de l'ensemble des coefficients de Fourier) on est capable de retrouver la fonction. La réponse est positive puisque l'on a le théorème suivant :

Théorème 7.3.1 Soit f une fonction sommable telle que \hat{f} soit aussi sommable, alors on a l'égalité $\mathfrak{F}^+(\mathfrak{F}^-(f))(t) = f(t)$, en tout point où la fonction f est continue.

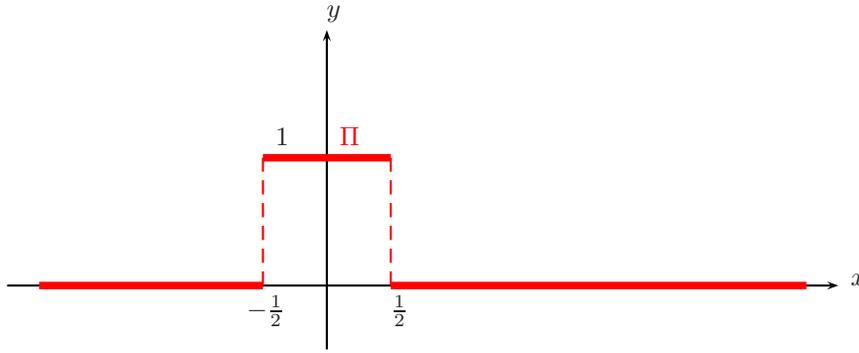
Remarque 7.3.2 Nous allons voir dans l'exemple qui suit, que, malheureusement, il se peut que f soit sommable sans que sa transformée de Fourier le soit.

7.4 Exemples de transformée de Fourier

7.4.1 Transformée de Fourier la fonction porte Π .

Il est d'abord clair que la fonction porte est une fonction sommable .

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(x)e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (7.6)$$

FIG. 7.1 – La fonction porte Π .

Pour $\nu = 0$, on a immédiatement $\widehat{\Pi}(0) = 1$, et pour des valeurs non nulles de ν , on a $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{-1}{2i\pi\nu} [e^{-2i\pi\nu x}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$. En appelant sinc la fonction définie par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, pour tout x non nul et prolongée par continuité en zéro, on obtient :

$$\widehat{\Pi}(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu) \quad (7.7)$$

On peut, par ailleurs montrer que la fonction sinc n'est pas sommable.

7.4.2 Transformée de Fourier de la fonction gaussienne

Il est aisé de montrer que cette fonction est bien sommable (on peut par exemple partir de l'inéquation $\exp(-x^2) < \exp(-|x|)$, pour tout x n'étant pas dans l'intervalle $[-1, 1]$). On a alors, en posant $g = \exp(-x^2)$:

$$\begin{aligned} \widehat{g} &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\left[(x + i\pi\nu)^2 + \pi^2\nu^2\right]\right] dx \\ &= e^{-\pi^2\nu^2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-(x + i\pi\nu)^2\right] dx \end{aligned} \quad (7.8)$$

En faisant le changement de variable $z = x + i\pi\nu$, on est amené à considérer une intégrale dans le plan complexe :

$$\widehat{g} = e^{-\pi^2\nu^2} \int_{\mathbb{R} + i\pi\nu} e^{-z^2} dz \quad (7.9)$$

On admettra que la fonction e^{-z^2} de la variable complexe z étant holomorphe, l'intégrale dans le plan complexe $\int_{\mathbb{R} + i\pi\nu} e^{-z^2} dz$ est égale à l'intégrale "ordinaire" $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ (on a, en quelque sorte, négligé $i\pi\nu$ devant l'infini). Enfin, on peut montrer (cf. T.D, par exemple) que : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. On a alors l'égalité :

$$\widehat{g} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2\nu^2} \quad (7.10)$$

Remarque 7.4.1 *La transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne.*

7.4.3 Transformée de Fourier de la fonction $\exp(-|x|)$

Soit h la fonction $h = \exp(-|x|)$. Des calculs élémentaires (cf. T.D. par exemple) conduisent à :

$$\widehat{h} = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2} \quad (7.11)$$

7.5 Quelques propriétés des transformées de Fourier

7.5.1 Linéarité de la Transformée de Fourier

Soit f et g deux fonctions complexes et sommables et soit λ et μ deux complexes quelconques, on a alors :

$$\mathfrak{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathfrak{F}(f) + \mu \mathfrak{F}(g) \quad (7.12)$$

7.5.2 Transformée de Fourier des fonctions réelles

Soit f une *fonction réelle*, il est alors immédiat de constater que $\widehat{f}(-\nu) = \widehat{f}^*(\nu)$. Cette propriété appelée souvent *symétrie hermitienne* sera souvent utilisée en Physique : elle signifie que si l'on connaît uniquement la transformée de Fourier de f pour les valeurs positives de ν (ces valeurs positives de ν s'identifiant aux *fréquences*) on peut, par conjugaison, connaître la transformée de Fourier de f pour les valeurs négatives de ν (et par conséquent connaître la transformée de Fourier de f pour toutes les valeurs de ν). Ainsi, par transformée de Fourier inverse, on peut espérer connaître la fonction f à partir uniquement de sa transformée de Fourier pour les valeurs positives de ν . Cette propriété remarquable est en général fautive pour des fonctions non réelles.

7.5.3 Changement d'échelle

Soit f une fonction sommable et a un réel non nul, on se propose d'évaluer la quantité suivante :

$$\mathfrak{F}(f(ax)) = \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (7.13)$$

On fait alors le changement de variable $u = ax$. Si a est un réel positif, on a alors :

$$\mathfrak{F}(f(ax))(\nu) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu \frac{u}{a}} du \quad (7.14)$$

Et si a est un réel négatif :

$$\mathfrak{F}(f(ax))(\nu) = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu \frac{u}{a}} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi\nu \frac{u}{a}} du \quad (7.15)$$

En résumé, nous avons donc :

$$\mathfrak{F}(f(ax))(\nu) = \frac{1}{|a|} \mathfrak{F}(f(x))\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (7.16)$$

Cette dernière propriété a une signification physique très importante : un signal dont le support est étroit (resp. large) dans le domaine temporel est large (resp. étroit) dans le domaine des fréquences.

7.5.4 Parité

En utilisant l'égalité 7.16 avec $a = -1$, il est immédiat de constater que si la fonction f est paire (resp. impaire), sa transformée de Fourier est aussi paire (resp. impaire) : *la transformée de Fourier conserve la parité.*

7.5.5 Translation

Soit f une fonction sommable, on veut évaluer :

$$\mathfrak{F}(f(x-a))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (7.17)$$

En faisant le changement de variable $u = x - a$, on obtient :

$$\mathfrak{F}(f(x-a))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi\nu(u+a)} du = e^{-2i\pi\nu a} \mathfrak{F}(f(x))(\nu) \quad (7.18)$$

On dit alors que l'on a modulé le signal.

Une translation dans le domaine spatial équivaut à une modulation dans le domaine fréquentiel.

7.5.6 Modulation

Cette opération est en quelque sorte l'opération inverse de l'opération de translation. On a, en effet :

$$\mathfrak{F}(e^{-2i\pi\nu_0 x} f(x))(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi(\nu+\nu_0)x} dx = \mathfrak{F}(f(x))(\nu + \nu_0) \quad (7.19)$$

Une modulation dans le domaine spatial équivaut à une translation dans le domaine fréquentiel.

7.5.7 Dérivation

Supposons que f et sa dérivée f' soient toutes les deux sommables, nous allons calculer la Transformée de Fourier de f' :

$$\mathfrak{F}(f') = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-2i\pi\nu x} dx = [f(x)e^{-2i\pi\nu x}]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x} dx \quad (7.20)$$

Nous allons alors admettre que si f et sa dérivée f' sont toutes les deux sommables alors nécessairement f s'annule à l'infini ($f(\pm\infty) = 0$). Dans ces conditions, on obtient :

$$\mathfrak{F}(f') = 2i\pi\nu \mathfrak{F}(f) \quad (7.21)$$

Le passage à la transformée de Fourier transforme des équations différentielles en équations algébriques.

7.5.8 Théorème de Parseval-Plancherel

Si l'on introduit le produit scalaire $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f g^* dx$, alors on admettra sans démonstration l'égalité suivante :

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (7.22)$$

qui n'est évidemment pas sans rappeler l'égalité obtenue dans le chapitre précédent concernant les fonctions périodiques.

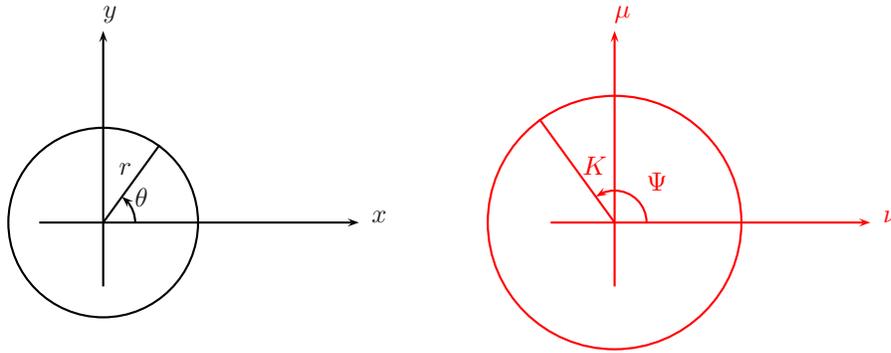


FIG. 7.2 – Passage aux coordonnées polaires dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier.

7.6 Transformation de Fourier bidimensionnelle

7.6.1 Définition de l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} , f est élément de $L^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^2} |f| d^2x < +\infty$.

7.6.2 Définition de la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction sommable

Étant donnée une fonction f de $L^1(\mathbb{R}^2)$, on définit la transformée de Fourier de f , notée encore $\mathfrak{F}(f)$ ou \hat{f} de la manière suivante :

$$\mathfrak{F}(f)(\nu, \mu) = \hat{f}(\nu, \mu) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2i\pi(\nu x + \mu y)} dx dy \quad (7.23)$$

7.6.3 Transformée de Fourier d'une fonction radiale

Il arrive assez souvent que les fonctions que l'on utilise en Physique ne dépendent que de la distance à un point. La fonction f ne dépend alors explicitement que d'une seule variable que l'on note généralement r . Dans ces conditions, il existe une fonction F telle que $F(r) = f(x, y)$. Posant $\nu = K \cos \psi$ et $\mu = K \sin \psi$, la transformée de Fourier de f prend l'allure suivante :

$$\hat{f} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+2\pi} F(r) e^{-2i\pi K r (\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta)} r dr d\theta \quad (7.24)$$

Utilisant le théorème de Fubini, on arrive à :

$$\hat{f} = \int_0^{+\infty} r F(r) \left[\int_0^{+2\pi} e^{-2i\pi K r \cos(\psi - \theta)} d\theta \right] dr \quad (7.25)$$

L'expression entre crochets est exprimable à partir de fonctions spéciales appelées *fonctions de Bessel*. Ce présent support de cours n'ayant pas vocation à insister sur ce point on pourra consulter des ouvrages plus spécialisés. Dans ces ouvrages on pourra trouver, entre autres, l'égalité suivante :

$$\int_0^{+2\pi} e^{-iu \cos \phi} d\phi = 2\pi J_0(u) \quad (7.26)$$

Prenant en compte la périodicité de la fonction cosinus, on obtient :

$$\int_0^{+2\pi} e^{-2i\pi Kr \cos(\psi-\theta)} d\theta = 2\pi J_0(2\pi Kr), \quad (7.27)$$

ce qui nous conduit à

$$\hat{f} = 2\pi \int_0^{+\infty} r J_0(2\pi Kr) F(r) dr. \quad (7.28)$$

Cette dernière égalité est souvent appelée transformation de Hankel.

Il existe un cas particulier important notamment en Optique pour calculer l'intensité diffractée par un trou circulaire dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. Ce cas particulier correspond à :

$$F(r) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } r < R_0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (7.29)$$

La transformée de Fourier est alors réduite à :

$$\hat{f} = 2\pi \int_0^{R_0} r J_0(2\pi Kr) dr. \quad (7.30)$$

Cette fois-ci encore cette intégrale est exprimable uniquement en fonction de fonctions spéciales et l'on peut voir dans les ouvrages cités plus haut l'identité suivante :

$$\int_0^x u J_0(u) du = x J_1(x), \quad (7.31)$$

ce qui nous conduit sans peine à :

$$\hat{f} = 2\pi R_0^2 \frac{J_1(2\pi K R_0)}{2\pi K R_0}. \quad (7.32)$$

Cette dernière expression est à rapprocher de l'expression obtenue pour la transformée de Fourier (monodimensionnelle) de la fonction porte. Avant de finir, il est important de noter que, comme dans le cas de la fonction sinus, la fonction de Bessel J_1 est nulle en zéro. Plus précisément, on a l'équivalence suivante :

$$J_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x/2, \quad (7.33)$$

de sorte qu'en zéro \hat{f} vaut πR_0^2 .

Chapitre 8

Introduction à l'Analyse vectorielle

Sommaire

8.1	Propos liminaires	75
8.1.1	Introduction	75
8.1.2	Remarque sur les notations	76
8.2	Flux d'un champ de vecteurs	76
8.3	Théorème de Green-Ostrogradsky	76
8.3.1	Énoncé	76
8.3.2	Le théorème du gradient	76
8.4	Propriétés de l'opérateur divergence	77
8.4.1	Caractère intrinsèque de l'opérateur divergence	77
8.4.2	Linéarité de l'opérateur divergence	77
8.4.3	En vrac	77
8.5	Champ à flux conservatif	77
8.6	Le théorème de Stokes	78
8.6.1	Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe	78
8.6.2	Énoncé du théorème de Stokes	78
8.7	Propriétés de l'opérateur rotationnel	78
8.7.1	Caractère intrinsèque de l'opérateur rotationnel	78
8.7.2	Linéarité de l'opérateur rotationnel	78
8.7.3	En vrac	78
8.8	Opérateurs différentiels du second ordre	79

8.1 Propos liminaires

8.1.1 Introduction

En Physique, on est amené à associer une grandeur physique à un champ de vecteurs. Un champ de vecteurs est une application qui à tout point de l'espace, M , associe un vecteur \vec{V} . On note alors $\vec{V}(M)$ ou bien $\vec{V}(\vec{r})$, \vec{r} étant le vecteur position. Soit alors $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une base orthonormée, on peut alors décomposer en chaque point le vecteur \vec{V} dans cette base particulière :

$$\vec{V}(\vec{r}) = V_x(\vec{r})\vec{e}_x + V_y(\vec{r})\vec{e}_y + V_z(\vec{r})\vec{e}_z . \quad (8.1)$$

8.1.2 Remarque sur les notations

Dans tout ce qui suit, on notera les intégrales doubles \int_{Σ} plutôt que \iint_{Σ} et les intégrales triples \int_{Ω} plutôt que \iiint_{Ω} ¹.

8.2 Flux d'un champ de vecteurs

Soit $\vec{V}(\vec{r})$, un champ de vecteurs et Σ une surface, on définit le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(\vec{r})$ à travers Σ , le scalaire $\Phi_{\Sigma}(\vec{V})$ défini par :

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \int_{\Sigma} \vec{V}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \, ds \quad (8.2)$$

Remarque 8.2.1 *L'orientation de la normale est évidemment fondamentale puisque suivant le choix de l'orientation le flux sera positif ou négatif.*

Propriétés 8.2.2

1. Si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. On a

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{V}) = \Phi_{\Sigma_1}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2}(\vec{V}). \quad (8.3)$$

2. Soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux champs de vecteurs et soit λ_1 et λ_2 deux scalaires quelconques, on a :

$$\Phi_{\Sigma}(\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2) = \lambda_1 \Phi_{\Sigma}(\vec{V}_1) + \lambda_2 \Phi_{\Sigma}(\vec{V}_2). \quad (8.4)$$

8.3 Théorème de Green-Ostrogradsky

8.3.1 Énoncé

Soit \vec{V} un champ de vecteurs et soit Ω un ensemble borné et soit $\Sigma = \partial\Omega$ (bord du domaine Ω). On a alors la relation :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, d\vec{r} = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds. \quad (8.5)$$

où l'opérateur div est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs, appelé opérateur divergence. Exprimé en coordonnées cartésiennes, l'opérateur divergence s'écrit de la manière suivante :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (8.6)$$

8.3.2 Le théorème du gradient

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} U \, d\vec{r} = \int_{\Sigma} U \vec{n} \, ds. \quad (8.7)$$

¹ Σ et Ω désignant respectivement des surfaces et des volumes.

Pour montrer cette propriété il suffit de considérer la suite des égalités suivantes :

$$\left(\int_{\Omega} \text{grad } U \, d\vec{r} \right) \cdot \vec{e}_x = \int_{\Omega} (\text{grad } U \cdot \vec{e}_x) \, d\vec{r} \quad (8.8)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial x} \, d\vec{r} \quad (8.9)$$

$$= \int_{\Omega} \text{div} (U \vec{e}_x) \, d\vec{r} \quad (8.10)$$

$$= \int_{\Sigma} U \vec{e}_x \cdot \vec{n} \, ds \quad (8.11)$$

$$= \left(\int_{\Sigma} U \vec{n} \, ds \right) \cdot \vec{e}_x . \quad (8.12)$$

Cette égalité peut s'obtenir de la même manière pour \vec{e}_y et \vec{e}_z , ce qui montre la propriété.

8.4 Propriétés de l'opérateur divergence

8.4.1 Caractère intrinsèque de l'opérateur divergence

L'égalité 8.6 semble suggérer que la divergence du champ vecteurs \vec{V} dépende du choix de la base sur laquelle on projette ledit champ de vecteurs. En fait, on peut montrer qu'il n'en est rien, ce qui garantit à cet opérateur un statut particulier.

8.4.2 Linéarité de l'opérateur divergence

Soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux champs de vecteurs et soit λ_1 et λ_2 deux scalaires quelconques, on a :

$$\text{div} (\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2) = \lambda_1 \text{div} (\vec{V}_1) + \lambda_2 \text{div} (\vec{V}_2) . \quad (8.13)$$

8.4.3 En vrac

$$\text{div} (\alpha \vec{V}) = \alpha \text{div} (\vec{V}) + \text{grad } \alpha \cdot \vec{V} . \quad (8.14)$$

8.5 Champ à flux conservatif

Lorsque le champ d'un vecteur \vec{U} est tel que sa divergence est nulle en tout point, on parle de champ à flux conservatif. Pour des champs de vecteurs pareils, on peut parler de flux à travers une courbe fermée orientée Γ . En effet, on peut considérer une surface Σ_{Γ} dont le bord est précisément Γ , on peut parler de flux du champ de vecteurs \vec{V} à travers la surface Σ_{Γ} , soit $\Phi_{\Sigma_{\Gamma}}(\vec{V})$. Le problème, c'est qu'il existe une infinité de surfaces Σ_{Γ} dont le bord est Γ . Mais pour toutes les surfaces Σ_{Γ} , l'expression $\Phi_{\Sigma_{\Gamma}}(\vec{V})$ reste invariante. À cet effet, considérons deux surfaces Σ_{Γ} et Σ'_{Γ} , deux surfaces qui «s'appuient» sur Γ . Ces deux surfaces délimitent un volume Ω . Le théorème de Green Ostrogradsky donne alors la relation suivante :

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{V} \, d\vec{r} = \int_{\Sigma_{\Gamma} \cup \Sigma'_{\Gamma}} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \, ds \quad (8.15)$$

Si le champ de vecteurs est à divergence nulle, on a donc la relation :

$$\int_{\Sigma_r} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} ds = - \int_{\Sigma'_r} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} ds , \quad (8.16)$$

i.e.

$$\int_{\Sigma_r} \vec{V} \cdot \vec{n}_+ ds = \int_{\Sigma'_r} \vec{V} \cdot \vec{n}_+ ds . \quad (8.17)$$

Ainsi, quelle que soit la surface Σ_r s'appuyant sur Γ , le flux reste le même.

8.6 Le théorème de Stokes

8.6.1 Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Soit \vec{V} un champ de vecteurs et Γ une courbe. On définit la circulation de \vec{V} le long de Γ , le scalaire suivant :

$$\mathcal{C}_\Gamma(\vec{V}) = \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{t} dl , \quad (8.18)$$

où \vec{t} est le vecteur tangent à Γ .

8.6.2 Énoncé du théorème de Stokes

Soit \vec{V} un champ de vecteurs et soit Γ une courbe fermée orientée et une surface Σ_Γ «s'appuyant» sur Γ . La relation suivante

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{t} dl = \int_{\Sigma_\Gamma} \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} ds , \quad (8.19)$$

où l'opérateur rot est un opérateur différentiel vectoriel agissant sur un champ de vecteurs, appelé opérateur rotationnel. Exprimé en coordonnées cartésiennes, cet opérateur s'écrit de la manière suivante :

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z . \quad (8.20)$$

8.7 Propriétés de l'opérateur rotationnel

8.7.1 Caractère intrinsèque de l'opérateur rotationnel

L'opérateur rotationnel appelle les mêmes remarques que l'opérateur divergence.

8.7.2 Linéarité de l'opérateur rotationnel

Soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux champs de vecteurs et soit λ_1 et λ_2 deux scalaires quelconques, on a :

$$\text{rot} \left(\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2 \right) = \lambda_1 \text{rot} \left(\vec{V}_1 \right) + \lambda_2 \text{rot} \left(\vec{V}_2 \right) . \quad (8.21)$$

8.7.3 En vrac

1.

$$\text{rot grad } \vec{V} = \vec{0} \quad (8.22)$$

2. Soit α et \vec{V} resp. un champ de scalaires et un champ de vecteurs.

$$\text{rot}(\alpha \vec{V}) = \alpha \text{rot} \vec{V} + \text{grad} \alpha \times \vec{V} \quad (8.23)$$

- 3.

$$\text{div rot} \vec{V} = 0. \quad (8.24)$$

8.8 Opérateurs différentiels du second ordre

Dans les paragraphes précédents, on a vu l'importance des opérateurs div, rot et grad. On peut alors essayer de les composer en ayant à l'esprit que certaines compositions sont interdites. Ainsi « $\text{rot}(\text{div}(\vec{V}))$ » n'a pas de sens puisqu'on ne peut parler que du rotationnel d'un champ de vecteurs. L'ensemble des opérations envisageables est résumé dans le tableau ci-contre.

	grad	div	rot
grad	grad grad	grad div	grad rot
div	div grad	div div	div rot = 0
rot	rot grad = 0	rot div	rot rot

TAB. 8.1 – Opérateurs du second ordre. Les opérations illicites sont dans des boîtes rouges.

Ainsi, il apparaît que sur les neuf opérations envisageables, quatre opérations sont illicites et deux opérations sont triviales en ce sens que la composition des deux opérations différentielles donnent zéro. Il reste donc trois opérations dignes d'intérêt.

1. L'opérateur div grad s'appelle l'opérateur laplacien *scalaire* que l'on note Δ :

$$\Delta U := \text{div}(\text{grad} U). \quad (8.25)$$

Exprimé en coordonnées cartésiennes, il fait apparaître les dérivées partielles du second ordre :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (8.26)$$

2. On définit l'opérateur laplacien *vectorel*, noté $\vec{\Delta}$ de la manière suivante :

$$\vec{\Delta} \vec{V} := \text{grad div} \vec{V} - \text{rot rot} \vec{V}. \quad (8.27)$$

Exprimé en coordonnées cartésiennes ($\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$), le lien qu'il y a entre laplacien scalaire et le laplacien vectoriel est manifeste :

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \Delta V_x \vec{e}_x + \Delta V_y \vec{e}_y + \Delta V_z \vec{e}_z. \quad (8.28)$$

Il est important de noter que cette relation entre $\vec{\Delta}$ et Δ n'est vraie qu'en coordonnées cartésiennes !

Bibliographie

- [1] R. Petit. *DEUG et Math.* Masson, Paris, 1996.
- [2] N. Brouillet Y. Noirot, J. P. Parisot. *Cours de Physique, Mathématiques pour la Physique.* Dunod, Paris, 1997.
- [3] P. Benoist-Gueutal and M. Courbage. *Mathématiques pour la Physique, Tome I, II & III.* Eyrolles, Paris, 1992.
- [4] R. Petit. *L'outil mathématique pour la Physique.* Dunod, Paris, 5^{ème} édition, 1998.
- [5] Ouvrage collectif. *Dictionnaire des Mathématiques.* Albin Michel, Paris, 1997.
- [6] D. Guinin, F. Aubonnet, and B. Joppin. *Précis de mathématiques.* Bréal, 3^{ème} édition, 1993.
- [7] W. Appel. *Mathématiques pour la Physique et les physiciens.* H & K éditions, Bréal, 2002.

Index

équipollents, 4

bipoint, 4

Changement d'échelle, 70
colinéaires, 4

Dérivation, 71
Dirichlet, Théorème de, 59

Fonction gaussienne, 69
Fonction porte, 68
Fonction réelle, 70
Fonction radiale, 72
Fonction sommable, 67–72

Modulation, 71

Orthogonalité, 56

Parité, 71
Parseval, égalité de, 57
Parseval-Plancherel, Théorème de, 71

Séries de Fourier, 57

Translation, 71

vecteur, 4