Licence Sciences Pour l'Ingénieur

Remise à niveau mathématique : Matrices

Exercice 1

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0.1 & 8 \end{pmatrix}$

1. Donner le format de A
2. Donner les valeurs de chacun des éléments a_{41}, a_{23}, a_{33}, a_{32}
3. Ecrire la matrice transposée de A et donner son format.

Exercice 2

1. Donner la matrice dont la transposée est égale à son opposée
2. Donner la matrice A telle que pour tout indice i et j, $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la forme $a_{ij}=2i-j$

Exercice 3

On donne $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Calculer A+B, A-B, 3A, 4B, 3A-4B

Exercice 4

On considère la matrice A définie par $B=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer x pour que $A^2=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Effectuer les produits matriciels suivants lorsque c'est possible. Lorsque cela n'est pas possible, dites pourquoi.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit les matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et I_2=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On se propose de rechercher s'il existe une matrice B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que AxB=I_2.

1. Traduire cette égalité par un système de 4 équations à 4 inconnues.
2. Résoudre le système ainsi obtenu
3. Vérifier les égalités suivantes : AxB=BxA=I_2 . Que représente B pour la matrice A

Exercice 6

On considère les matrices à coefficients réels P et Q définies par :

P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et Q=$\frac{1}{4}(I+Q)$ I étant la matrice Unité d'ordre 3

1. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P

2. Calculer les produits (4I-P)Q et Q(4I-P). Qu'en concluez vous pour la matrice Q.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$Q^n=a_nI+b_nP$

Les suites (a_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrences :

$$a_n = \frac{1}{4}a_n$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + b_n$$

avec $a_0=1$ et $b_0=0$

4. En déduire a_n en fonction de n.

5. Justifier que pour tout entier n, non nul : $\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n$

6. En déduire que pour tout entier n : $b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

7. Donner alors l'expression, sous forme matricielle de Q^n en focntion de n

8. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n), définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{cases}$$

avec $x_0=1$ et $y_0=z_0=0$

On pose alors : $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

a. Déterminer U_0 et U_1.

b. Vérifier qie $U_{n+1}=QU_n$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n=Q^nU_0$.

d. En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n puis leur limite lorsque n tend vers l'infini.