Aix*Marseille université

Master EEEA

Traitement du signal
et des images

avec des illustrations tirées de
[Gonzalez and Woods : Digital image processing, Prentice Hall, 2002]

Cours 3
Transformée de Fourier

— Sommaire —

1. *Rappels sur la tranformée de Fourier 1D.*
2. *TF au sens des distributions.*
3. *Implémentation numérique : la TFD.*

Transformée de Fourier 1D [TF] : définition

Soit $f(x)$ une fonction ne contenant que des discontinuités de *première espèce* et vérifiant les *conditions (suffisantes) de Dirichlet*.

Définition : on introduit $f \leftrightarrow F$ **les paires de Fourier 1D** par les expressions

$$F(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi u x} dx$$

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{j2\pi u x} du$$

On écrit symboliquement ces deux opérateurs linéaires

$$F(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{TF}\{f\}(u) \qquad \text{et} \qquad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{TF}^{-1}\{F\}(x)$$

Note – *Dans toute la suite, on postulera l'existence des paires de* TF.

ATTENTION : en général, la TF est à valeurs dans $\mathbb{C}$, *c.à.d.*

$$\boxed{F(u) = \Re_F(u) + j\,\Im_F(u) \qquad ou \qquad F(u) = \rho_F(u)\, e^{j\theta_F(u)}}$$

avec $\Re_F$ *et* $\Im_F$ les parties réelles et imaginaires de *F*, et avec ρ_F *et* θ_F le module et la phase de *F*.

Le module et la phase s'expriment en fonction des parties réelle et imaginaire par

$$\boxed{\rho_F(u) \stackrel{\text{def}}{=} [\Re_F^2(u) + \Im_F^2(u)]^{1/2}} \qquad \boxed{\theta_F(u) \stackrel{\text{def}}{=} \tan^{-1}\left[\frac{\Im_F(u)}{\Re_F(u)}\right]}$$

En pratique, vous manipulerez effectivement des quantités complexes !

1er Exemple – La fonction « porte »

On introduit pour la suite de ce cours la ***fonction porte*** *qui sera notée*

$$\Pi_{[x_{0,} x_1]}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a \in \mathbb{R}, & pour\ (x) \in [x_{0,}\ x_1] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Question 1 : *Donnez les expressions du module ET de la phase de la TF de cette fonction en supposant $x_1 = -x_0$. Faites une représentation graphique.*

Question 2 : *Que ce passe-t-il si la quantité $\Delta_x = x_1 - x_0$ tend vers 0 ou + l'infini.*

Question 3 *: Mêmes questions pour des valeurs quelconques de x_1 et de x_0.*

Transformée de Fourier 1D : propriétés

La *symétrie d'écriture* entre les opérateurs TF et TF^{-1} garantit que toute propriété de TF est vraie pour TF^{-1} sous réserve d'échanger

F	*en*	f
(x, y)	*en*	(u, v)
j	*en*	$-j$

On rappelle ci-dessous les principales *propriétés* de la TF qui seront utiles pour le traitement d'image, *cf.* exercices pour les démonstrations.

[Linéarité] – *Soit* $f_1 \leftrightarrow F_1$ *et* $f_2 \leftrightarrow F_2$ *deux paires de Fourier et* $a, b \in \mathbb{C}$, *on a*

$$TF\{a f_1 + b f_2\}(u, v) = a F_1(u) + b F_2(u)$$

[Homothétie] – *Soit* $f_1 \leftrightarrow F_1$ *et* $f_2(x) = f_1(ax)$ *où* $a \in \mathbb{R}$, *alors*

$$F_2(u) = |a|^{-1} F_1(u/a)$$

[Trans. spatiale] – *Soit* $f_1 \leftrightarrow F_1$ *et* $f_2(x) = f_1(x - x_0)$ *avec* $x_0 \in \mathbb{R}$, *alors*

$$F_2(u) = F_1(u) e^{-j2\pi x_0 u}$$

[Trans. fréq.] – *Soit* $f_1 \leftrightarrow F_1$ *et* $F_2(u) = F_1(u - u_0)$ *avec* $u_0 \in \mathbb{R}$, *alors*

$$f_2(x) = f_1(x) e^{j2\pi u_0 x}$$

[Conjugaison] – *Soit* $f_1 \leftrightarrow F_1$ *et* $f_2(x) = \bar{f}_1(x)$ *deux paires de Fourier, et* $a, b \in \mathbb{C}$, *on a*

$$F_2(u) = \bar{F}_1(-u)$$

où $\bar{a}$ *désigne l'opération de conjugaison de* $a \in \mathbb{C}$.

On en déduit les propriétés importantes qui suivent :

A.1 – *Si f est à valeur dans* $\mathbb{R}$, *alors la* TF *est à symétrie hermitienne, c.à.d.,*

$$F(-u) = \bar{F}(u)$$

et dans ce cas, le module et la phase sont respectivement pair et impaire.

A.2 – *Si f est à valeur dans* $\mathbb{R}$ *et si elle est* ***paire***, *alors sa TF est* ***réelle***.

Transformée de Fourier 1D : opérateur de convolution

Définition [Convolution] – *Sous réserve d'existence, on définit le produit de convolution de deux fonctions* f_1 *et* f_2 *noté* $f_3 = f_1 \star f_2$ *par*

$$f_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau)\, d\tau$$

L'intérêt pratique de la convolution est double : (1) elle s'exprime simplement dans le domaine de Fourier (*cf.* plus loin) et, (2) elle est *équivalente* à une opération de *filtrage par un système linéaire invariant*.

Note – Dans la suite, on postule l'existence du produit de convolution.

[Convolution=produit des TF] – *Soit* $f_1 \leftrightarrow F_1$ *et* $f_2 \leftrightarrow F_2$ *deux paires de Fourier et* f_3 *telle que* $f_3 = f_1 \star f_2$, *alors* $\boxed{F_3 = F_1 \times F_2}$

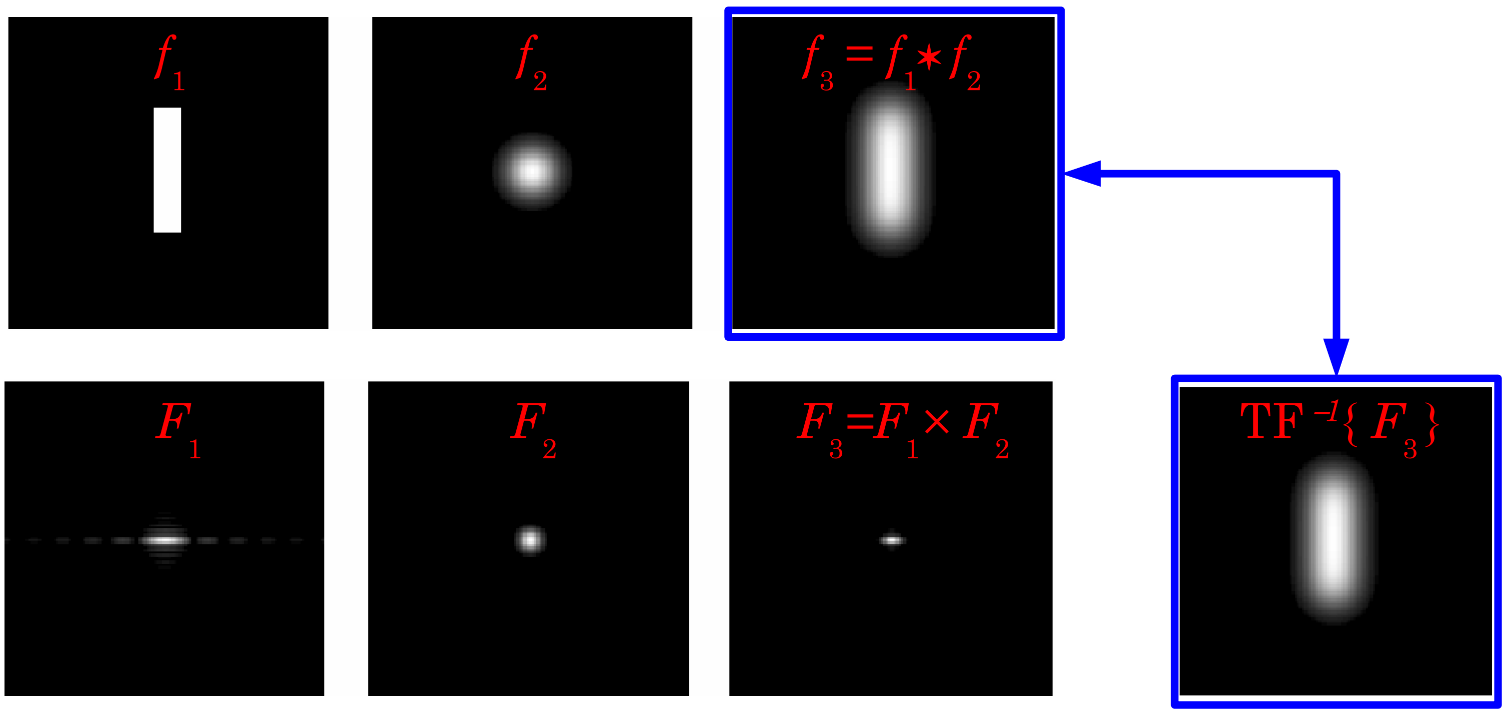
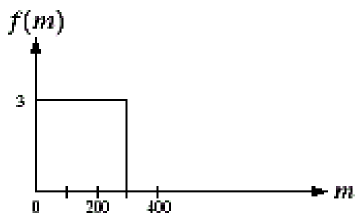


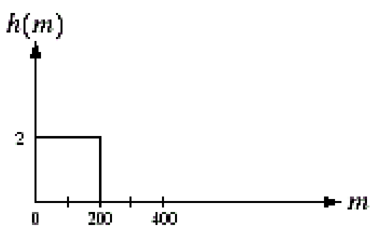
Illustration du résultat fondamental reliant la convolution de deux fonctions et la multiplication de leur TF respective.

L'opération de convolution correspond au (1) retournement d'une séquence, (2) décalage de cette séquence et (3) multiplication.

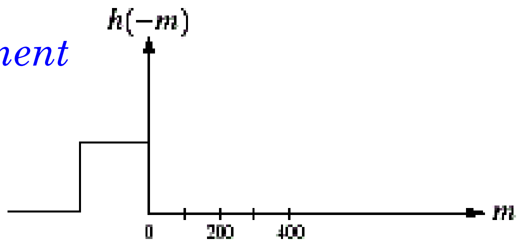
Séquence f de taille P



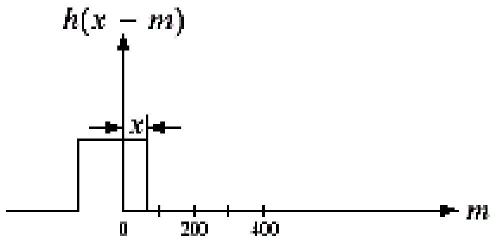
Séquence h de taille Q



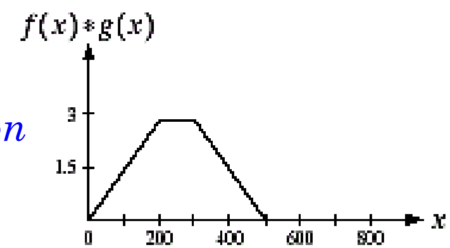
(1) *retournement*



(2) *décalage*



(3) *multiplication*



On remarque que si le noyau est suffisamment « régulier », alors la convolution produit un lissage de la fonction filtrée.

2nd Exemple – **Troncature = perte d'information**

En pratique, on n'observe jamais un signal physique s(t) (une mesure issue d'un capteur) sur un horizon infini. L'observation consiste donc en une troncature de ce signal qu'on notera $st(t)$.

On modélise la troncature par une fonction porte :

$$\boxed{st(t)=s(t)\Pi(t)}$$

Question 1 : *calculez la* TF *du signal réellement observé.*

Question 2 : *En vous aidant des calculs effectués précédemment, interprétez l'impact de l'observation sur la* TF *de* $s(t)$.

TF des fonction périodiques : la série de Fourier

On s'intéresse maintenant à l'*ensemble des fonctions périodiques dont la période est de carré intégrable* qu'on notera $\boxed{L_P^2(T)}$. On peut munir cet espace d'un *produit scalaire*

$$\boxed{\langle f_{1,} f_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f_1(x) f_2^*(x) dx}$$

et montrer que $\boxed{L_P^2(T)}$ admet pour base orthonormale $\boxed{(e^{j 2\pi n x/T}, n \in \mathbb{Z})}$ .On définit alors le n-ème *coefficient de Fourier* comme la projection de $f(x)$ sur le n-ème élément de la base et on peut montrer que

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2 pi j n \frac{x}{T}} \qquad où \qquad c_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, e^{2 pi j n/T} \rangle}$$

Ces deux expressions sont « proches » du couple TF / TF^{-1} sans néanmoins s'y identifier. Pour permettre d'unifier les deux transformations, nous allons introduire la *distribution de Dirac*.

Cours 3
Transformée de Fourier

— *Sommaire* —

1. *Rappels sur la tranformée de Fourier 1D.*
2. ***TF au sens des distributions.***
3. *Implémentation numérique : la TFD.*

TF au sens des distributions : la distribution de Dirac

La distribution de Dirac est un opérateur sur les fonctions qui est défini par la relation suivante

$$\boxed{(\delta_a, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(a)}$$

pour toute fonction ϕ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue au point a $\in \mathbb{R}$

Les « physiciens » admettent plutôt cette autre définition

$$\boxed{(\delta_a, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \delta(x-a)\,\phi(x)\,dx = \phi(a)}$$

qui est très utile *bien qu'elle ne soit pas rigoureuse* en termes mathématiques. Par cette « définition », on obtient les TF aux *sens des distributions* suivantes...

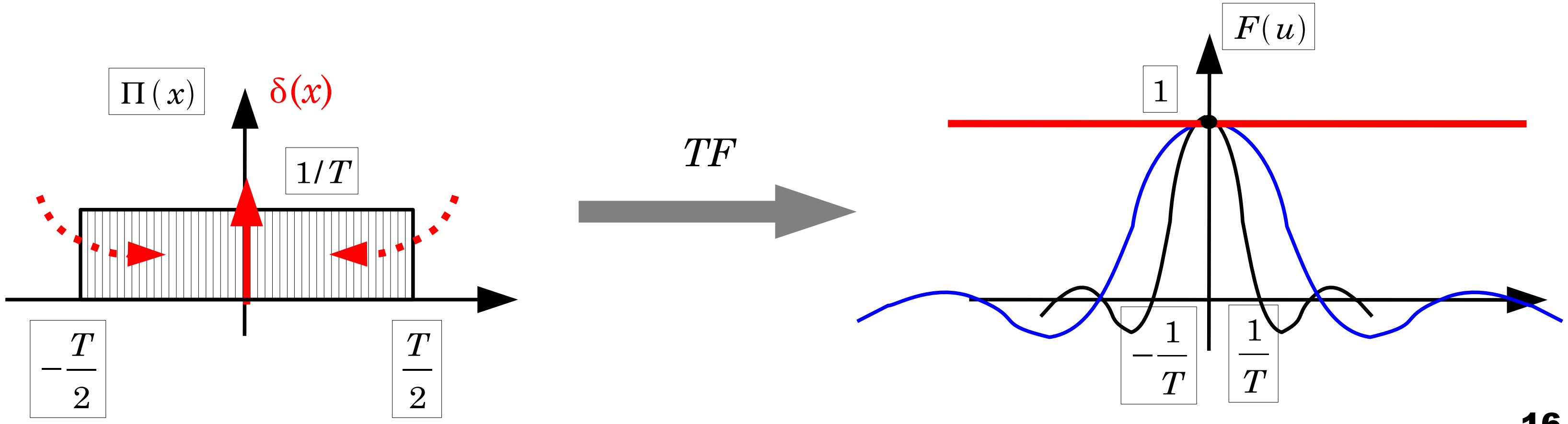
$$TF\{\delta_a\} = e^{-j2\pi ua}$$

$$TF\{e^{j2\pi x u_0}\} = \delta(u-u_0)$$

[Constante] La fonction constante sur $\mathbb{R}$admet pour TF

$$TF\{a\} = a\delta(u)$$

Ces résultats permettent de donner une « illustration » de la distribution de Dirac comme cas limite de la TF de la porte...

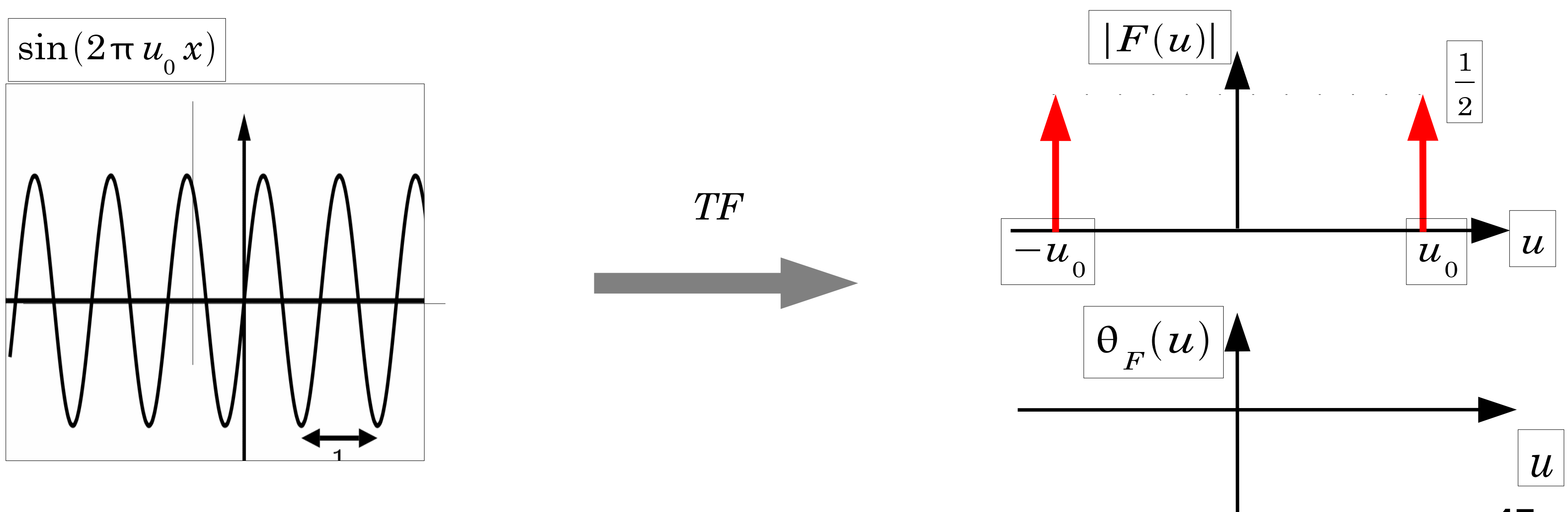


[fonctions sin / cos] Les *formes de Euler* des fonctions trigonométriques permettent d'écrire

$$TF\{\cos(2\pi u_0 x)\} = \frac{1}{2}[\delta(u-u_0)+\delta(u+u_0)]$$

$$TF\{\sin(2\pi u_0 x)\} = \frac{1}{2j}[\delta(u-u_0)-\delta(u+u_0)]$$

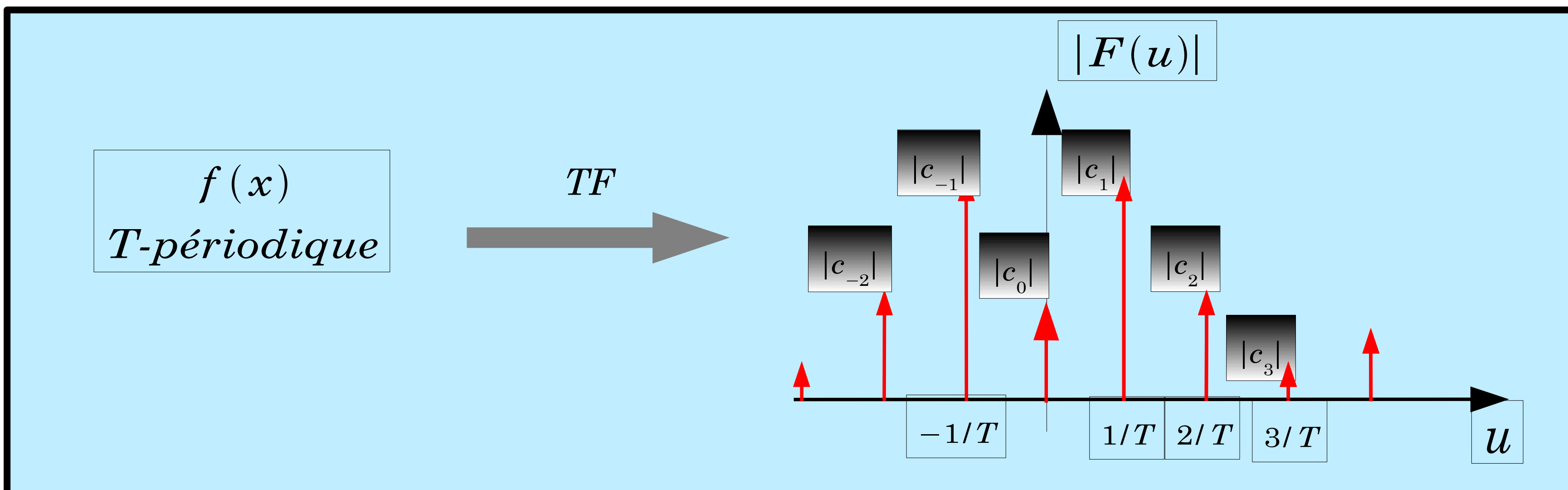
Ce qui conduit à exprimer le spectre des fonctions sinus et cosinus par des raies situées à la fréquence considérée et à son opposée. Ce spectre de distribution se représente de la manière suivante [*Quelle est la phase ?*]:



[Fonction périodique et TF au sens des distribution] En partant de l'expression de la série de Fourier d'une fonction périodique $f(x)$, et en utilisant l'intégrale de Fourier, on montre très simplement que sa TF au sens des distributions s'écrit

$$\boxed{F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta\left(u - n/T\right)}$$

ce qui correspond à un **spectre de raies** que l'on représente sous la forme



TF 1D : note finale

Remarque 1 – La transformée de Fourier possède des propriétés intéressantes pour l'analyse et le traitement des signaux et des images.

Remarque 2 – La transformée n'est calculable simplement que pour des fonctions analytiques simples (carré, *etc.*). En particulier, on ne peut pas implanter cette transformation sur un calculateur car (1) la fréquences u varient dans un continuum, (2) une extension infinie selon la variable x est nécessaire.

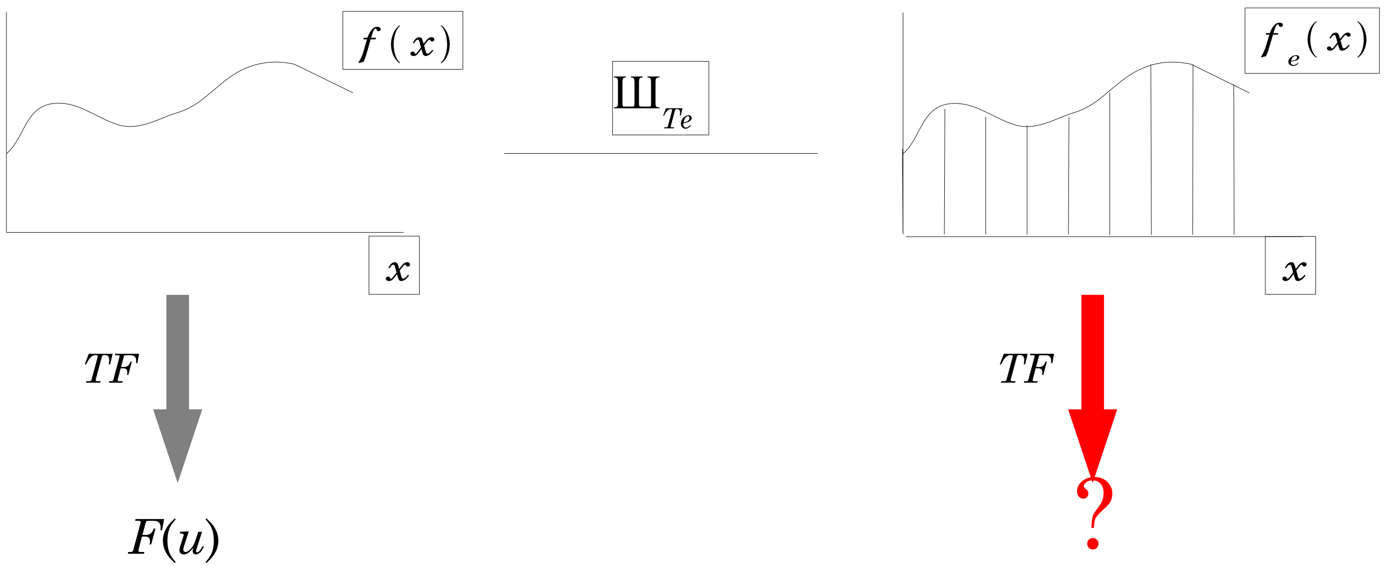
Remarque 3 – Nous allons maintenant introduire une « autre » transformation de Fourier qui (1) peut être implantée sur calculateur, (2) ne demande pas d'attention particulière concernant d'éventuelles conditions d'existence, et (3) possède les mêmes propriétés intéressantes que la TF initiale.

Du continu au discret : échantillonnage

On introduit l'opération d'échantillonnage avec une période T_e d'une fonction $f(x)$ en constituant la *suite d'impulsions de Dirac* $f_e(x)$ suivante

$$f_e(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]\delta(x - nT_e) \quad avec \quad f[n] \stackrel{\text{def}}{=} f(nT_e)$$

Ce formalisme permet de faire un premier pas vers une version « informatique » de la transformée de Fourier.



Du continu au discret : `TF à temps discret`

La *TF des signaux à temps discret* (TFTD) correspond à la TF au sens des distributions de $f_e(x)$

$$\boxed{F_e(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] e^{-j2\pi n\nu} \qquad avec \qquad \nu \stackrel{\text{def}}{=} u T_e}$$

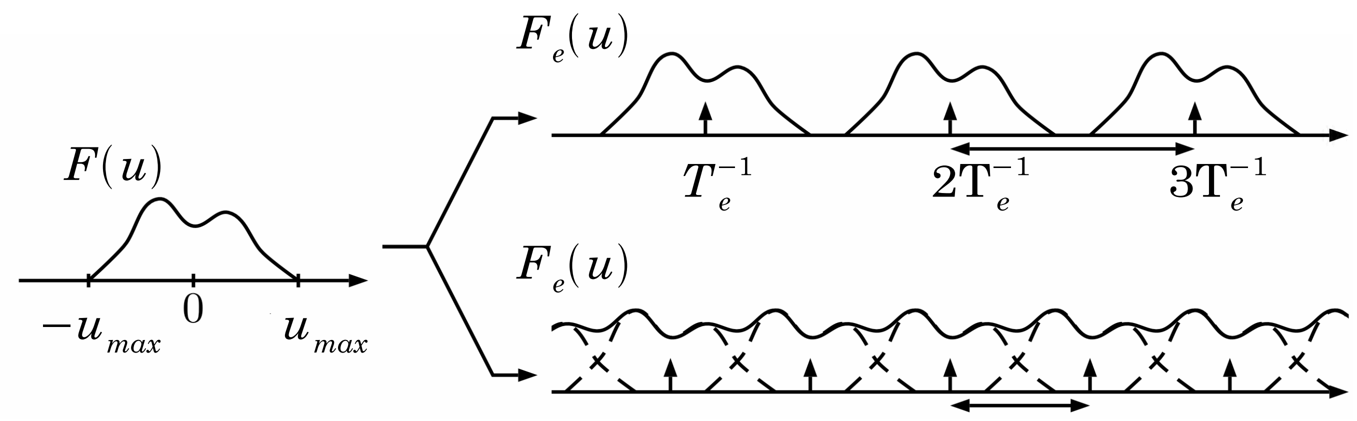
Fréquence réduite

On montre (*cf. cours*) les points importants ci-dessous :

1 – $F_e(u)$ est une fonction périodique,
2 – la période de $F_e(u)$ est $\nu = 1$ ou $\boxed{T_e^{-1}}$ en fréquence *réelle*,
3 – à un facteur d'échelle près, le motif périodisé est $F(u)$.

Du continu au discret : Théorème de Shannon

La notion de repliement spectral découle de ce dernier résultat : *pour un spectre à support borné*, si la *fréquence d'échantillonnage* T_e^{-1} est trop faible, alors on « replie » le spectre et la reconstruction est impossible.



Pour la reconstruction, on en déduit le théorème de Shannon

> Soit $f(x)$ une fonction de support fréquentiel borné $[-u_{max}, u_{max}]$ et $f_e(x)$ une version échantillonnée avec une période d'échantillonnage T_e. La reconstruction de f à partir de ses échantillons est possible si $T_e^{-1} \geq 2u_{max}$.

Le repliement spectral produit des structures absentes dans l'image initiale qui sont l'« écho » des composantes HF. Sur l'exemple ci-dessous, l'image de gauche est échantillonnée à une fréquence « suffisante », les deux images suivantes sont sous-échantillonnées 2 et 4 fois, respectivement. Notez que les éléments BF (zones uniformes) sont plutôt bien conservé tandis que les HF (carreaux, rayures) sont très distordues.

Cours 3
Transformée de Fourier

— Sommaire —

1. *Rappels sur la tranformée de Fourier 1D.*
2. *TF au sens des distributions.*
3. ***Implémentation numérique : la TFD.***

TF discrète (TFD) : la TF « numérique »

Pour une **séquence de longueur finie** de N échantillons

$$\boxed{f[n] \overset{\text{def}}{=} f_e(nT_e) \quad \text{pour} \quad n=0,\ldots,N-1.}$$

nous avons associé une représentation fréquentielle appelée la **transformée de Fourier discrète** (TFD-1D) et son inverse

$$\boxed{F[k] \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \qquad \text{et} \qquad f[n] \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j2\pi n \frac{k}{N}}}$$

On écrit également ces deux opérations

$$\boxed{F[k] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{TFD}\{f\}[k] \qquad \text{et} \qquad f[n] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{TFD}^{-1}\{F\}[n]}$$

Les propriétés ci-dessous de la TFD sont similaires à celles énoncées pour la TF. Ces différentes propriétés sont revues ci-dessous.

[Symétrie] – *idem.*

[Linéarité] – *idem.*

[Homothétie] – *idem sauf que a dans* $\mathbb{Z}$.

[Trans. spatiale] – *idem sauf* x_0 *dans* $\mathbb{Z}$.

[Trans. fréq.] – *idem sauf* u_0 *dans* $\mathbb{Z}$.

Il faut aussi noter certaines **propriétés supplémentaires** qui sont détaillées dans ce qui suit.

TF discrète : Lien avec la TFTD et la TF...

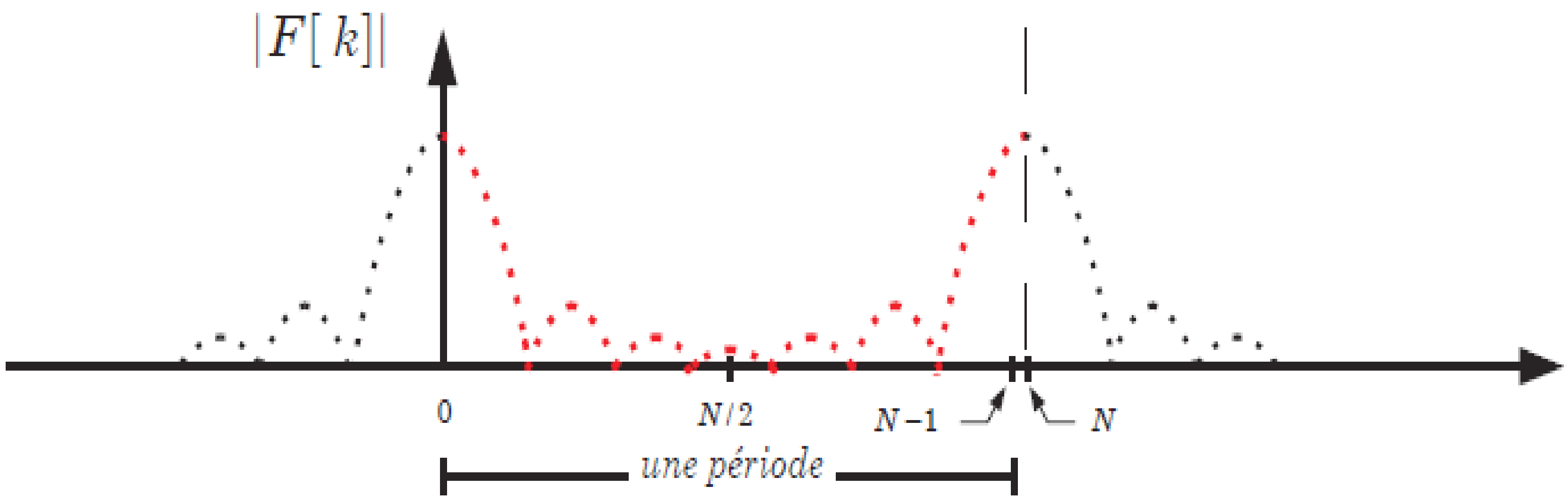
L'intérêt pratique de la TFD est qu'elle peut être calculée rapidement (algorithme FFT) sur un calculateur quelconque. Néanmoins, la TFD est-elle une *bonne approximation* du spectre initial $F(u)$?

[Lien TFD / TFTD] – La TFD correspond à un *échantillonnage fréquentiel* de la TFTD définie page 20, c.à.d.

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad F[k] = F_e(\nu) \quad \nu = \frac{k}{N}$$

TF discrète : Lien avec la TFTD et la TF...

L'intérêt pratique de la TFD est qu'elle peut être calculée rapidement (algorithme FFT) sur un calculateur quelconque. Néanmoins, la TFD est-elle une *bonne approximation* du spectre initial $F(u)$?



Le résultat précédent établit que la TFD est l'*échantillonnage fréquentiel* de la TFTD. En particulier, il est facile de voir que $F[k]$ est une *séquence périodique* dont le motif élémentaire est défini en prenant $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Une autre périodicité doit être soulignée car elle intervient dans de nombreux effets lors des mises en œuvre :

[Périodicités] – *Le caractère discret des séquences* $f[.]$ *et* $F[.]$ *impose qu'elles soient considérées comme cycliques de période* N, *c.à.d.* $\forall\ p \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{F[k] = F[k + q \times N]} \quad \text{et} \quad \boxed{f[n] = f[n + q \times N]}$$

Preuve : (cf. cours)

1 – *fonction f échantillonnée* ⇔ *F périodique,*

2 – *Spectre F échantillonné* ⇔ *f périodique.*

Exercice :

Donnez les expressions des TFD pour les fonctions suivantes définies sur N points

(1) [fonction de Kroneker] –

$$\boxed{\delta[n] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & sinon. \end{cases}}$$

(2) [sinus] –

$$\boxed{\sin(2\pi\nu_x n)}$$

Indice : **(1)** directement à partir de l'expression de la TFD, **(2)** en vous appuyant sur le lien entre TF et TFD.

Un des intérêts de la TF était l'équivalence entre convolution temporelle et multiplication spectrale. Ce sera aussi le cas pour la TFD *à condition de tenir compte de la périodicité implicite des séquences*.

Pour le voir, nous introduisons la convolution issue de la discrétisation de la version continue :

Définition [Convolution discrète] – *La convolution de deux séquences f_1 et f_2 de longueur respective N et P est noté $f_3 = f_1 \star f_2$ et défini par*

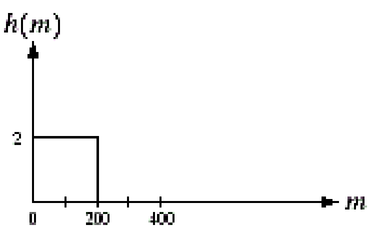
$$f_3[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^{N+P-2} f_1[p] f_2[n-p]$$

Remarque – Le produit de convolution est *commutatif*. Par ailleurs, le *support* d'une convolution mono-dimensionnelle pour deux séquences de P et Q points est de $P+Q-1$ points.

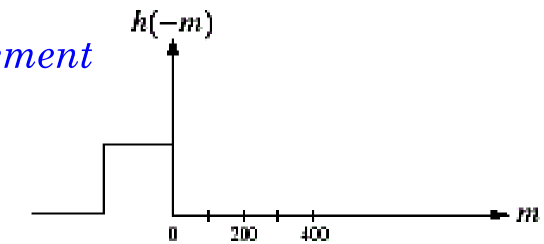
Cette opération correspond au filtrage d'une séquence par un noyau donné. Le principe reste identique au cas continu : (1) *retournement d'une séquence*, (2) *décalage de cette séquence* et (3) *multiplication*.

Séquence f de taille P

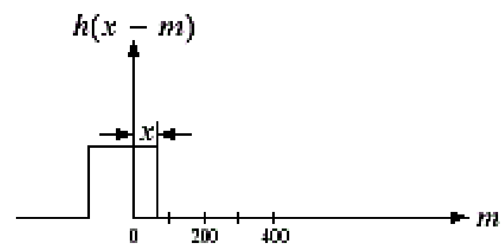
Séquence h de taille Q



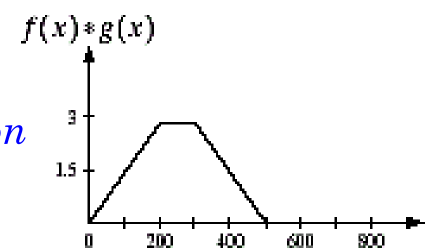
(1) *retournement*



(2) *décalage*



(3) *multiplication*



PROBLEME : en général, cette opération *ne correspond pas* au produit des TFD de chaque séquence !

L'opération associée au produit des TFD est la *convolution circulaire* qui correspond à la convolution des *séquences périodiques*.

Définition [Convolution circulaire] – *La convolution circulaire de deux séquences f_1 et f_2 de période respective P et Q est une séquence périodique noté $f_3 = f_1 \otimes f_2$ et défini par*

$$\boxed{f_3^{\text{Per}}[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^{P+Q-2} f_1[p] f_2^{\text{Per}}[n-p]}$$

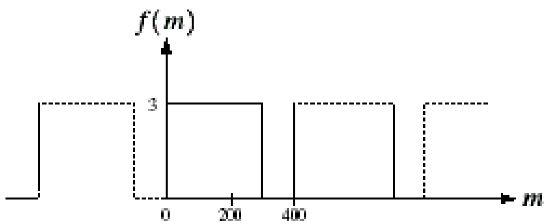
où $\boxed{f_2^{\text{Per}}}$ *et* $\boxed{f_3^{\text{Per}}}$ *correspondent à une période de f_2 et f_3, respectivement.*

[Convolution circulaire par TFD] – *Soit f_1 et f_2 deux séquences périodiques de période P et $f_3 = f_1 \otimes f_2$, alors*

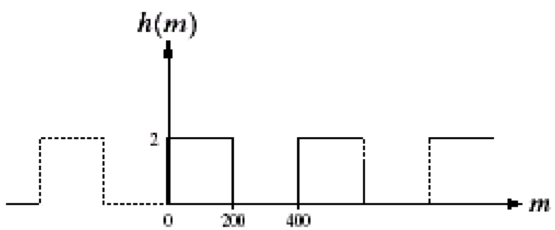
$$\boxed{\text{TFD}\{f_3^{\text{Per}}\}[n] = \text{TFD}\{f_1^{\text{Per}}\}[n] \times \text{TFD}\{f_2^{\text{Per}}\}[n]}$$

• **Illustration de la convolution circulaire :**

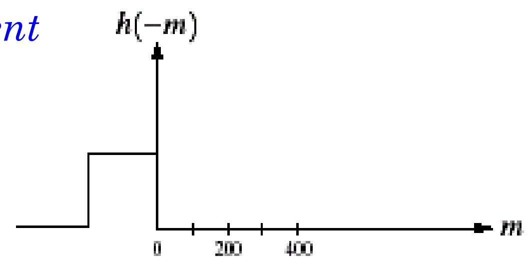
Séquence f



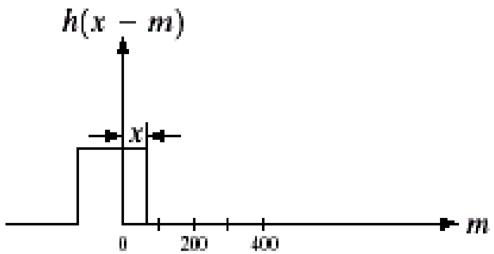
Séquence h



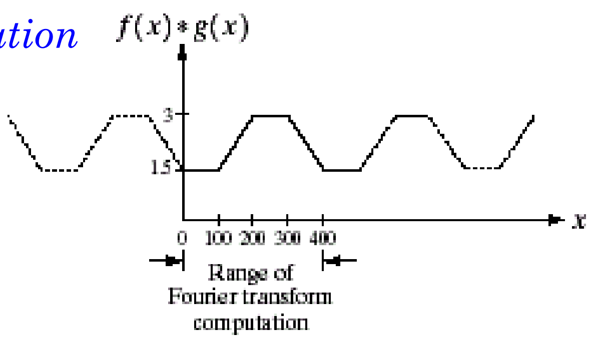
(1) *retournement*



(2) *décalage*

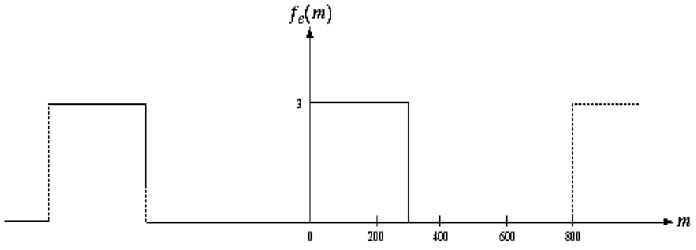


(3) *multiplication*

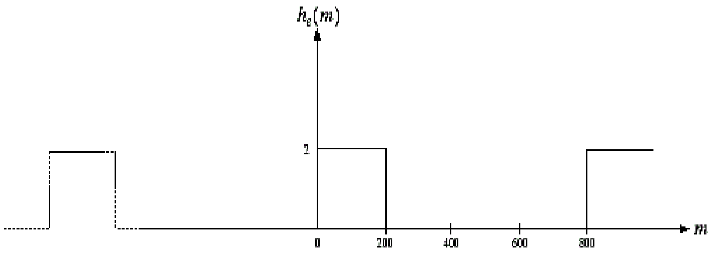


• **Un moyen simple de retrouver** le résultat souhaité est d'étendre les supports des séquences considérées par « **bourrage de zéro** » !

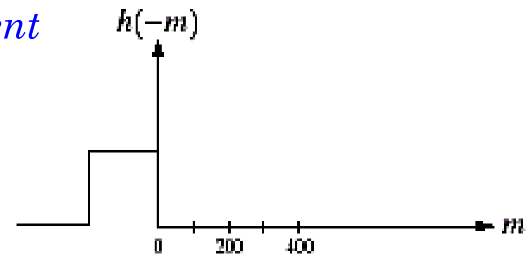
Séquence f de période de taille P+Q–1



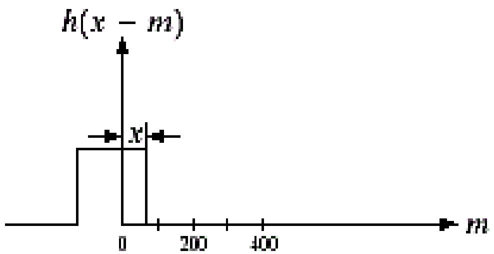
Séquence h de période de taille P+Q–1



(1) *retournement*



(2) *décalage*



(3) *multiplication*