

Mélanges généralisés et copules dans les CMC

S. Derrode, W. Pieczynski et N. Brunel

Ecole Centrale Marseille

GSM / Institut Fresnel

stephane.derrode@fresnel.fr

<http://www.fresnel.fr/perso/derrode/>

CMC et Segmentation d'images

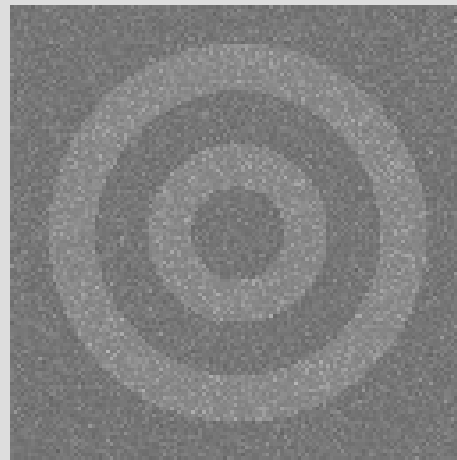


Image originale y

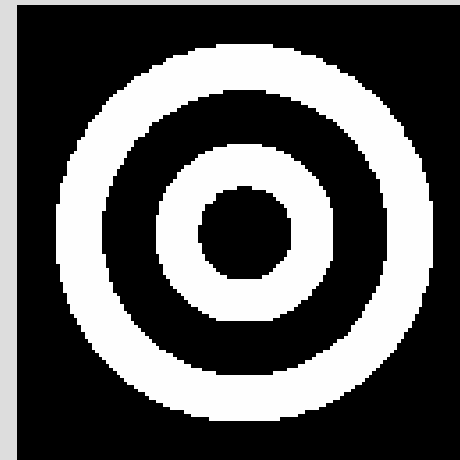
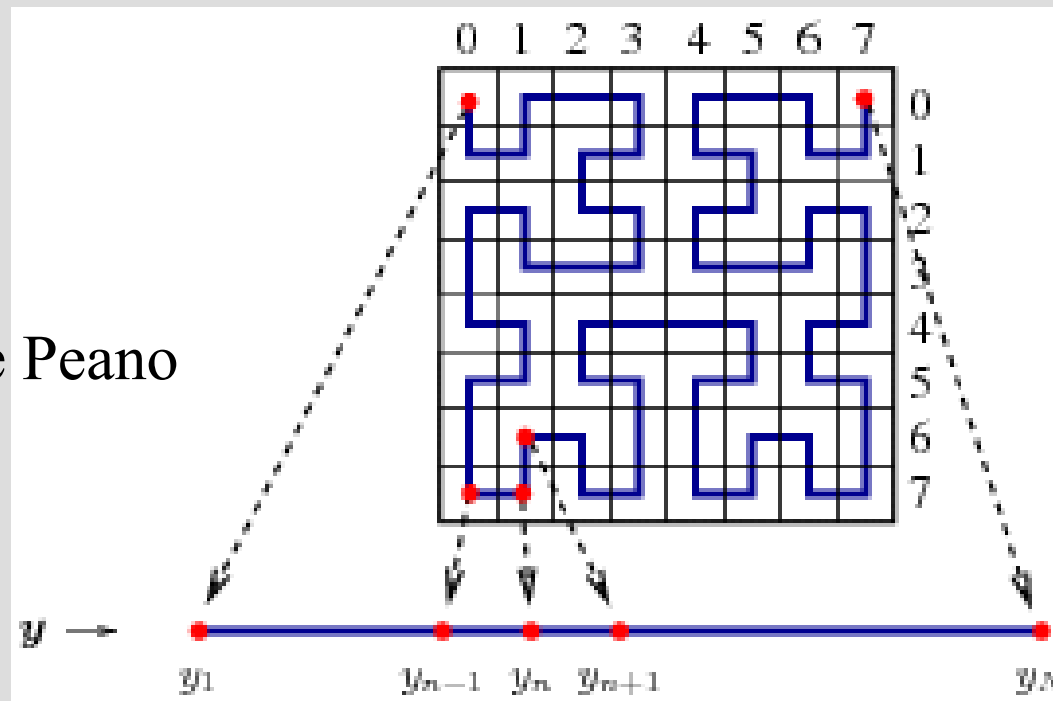


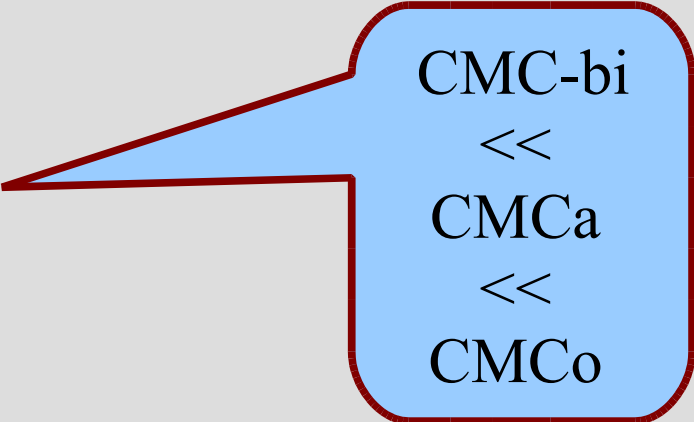
Image segmentée x

Parcours de Peano



Plan de l'exposé

- Chaînes de Markov Cachées
 - CMC à bruit indépendant (CMC-bi)
 - Chaîne de Markov couple (CMCo)
 - Chaîne de Markov Cachée (CMCa)
- Copules
 - Définition et exemples
 - Copules dans les CMCo et CMCa
- Résultats de segmentation
 - Image simulée
 - Image satellitaire



CMC-bi
<<
CMCa
<<
CMCo

Introduction

Processus des observations $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n, \dots, Y_N)$, $Y_n \in \mathbb{R}$

Processus de classes $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$, $X_n \in \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$


Processus couple $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $Z_n = (X_n, Y_n)$

Chaînes de Markov $p(X_n | \mathbf{X}_{1, \dots, n-1}) = p(X_n | X_{n-1})$

Décision bayésienne $\hat{\mathbf{x}}^{OPT}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}} \in \Omega^N} E[L(\mathbf{X} = \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$

MAP $\hat{\mathbf{x}}^{MAP}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\hat{\mathbf{x}} \in \Omega^N} p(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$

MPM $\hat{x}_n^{MPM}(\mathbf{y}) = \arg \max_{x_n \in \Omega} p(X_n = x_n | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$



$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{z})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}$$

CMC à bruit indépendant (CMC-bi)

Hypothèses

H1 : \mathbf{X} est une chaîne de Markov stationnaire


Loi initiale $\pi(k) = p(X_1 = k)$ 

Loi stationnaire $a(k, l) = p(X_2 = l | X_1 = k)$ 

$$p(\mathbf{x}) = \pi(x_1) \prod_{n=1}^{N-1} a(x_n, x_{n+1})$$

H2 : Les V.A. Y_n sont indépendentes conditionnellement à \mathbf{X}

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{n=1}^N p(y_n | \mathbf{x})$$

H3 : $p(y_n | \mathbf{x}) = p(y_n | x_n) = f_{x_n}(y_n)$ 

lois d'attache aux données

Estimation des paramètres : EM/SEM/ICE (procédure forward/backward)

Globalement

$$\Rightarrow p(\mathbf{z}) = \pi(x_1) f_{x_1}(y_1) \prod_{n=2}^N a(x_{n-1}, x_n) f_{x_n}(y_n)$$

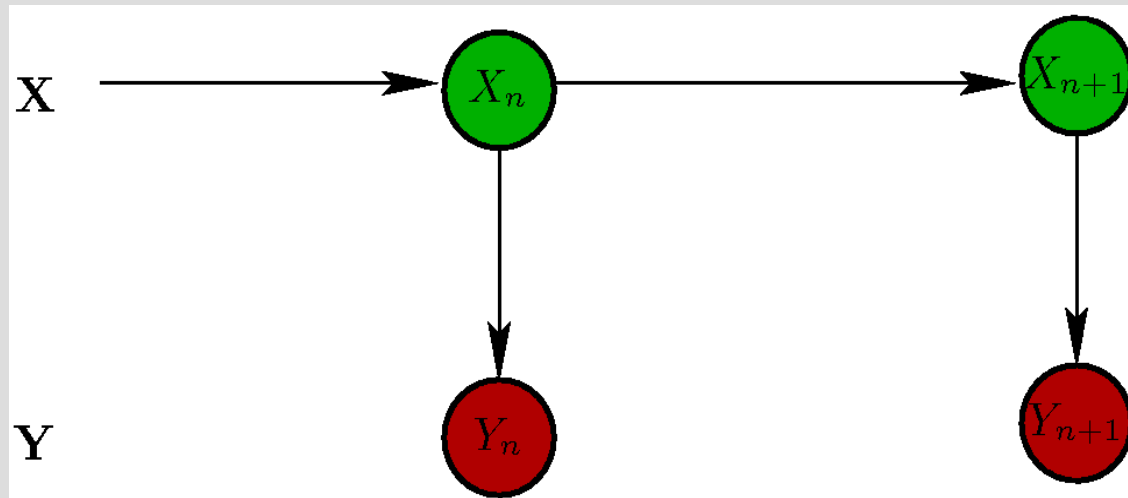
Localement

$$p(y_1, y_2 | x_1, x_2) = f_{x_1}(y_1) f_{x_2}(y_2)$$

$$p(z_1, z_2) = p(x_1, x_2, y_1, y_2) = a(x_1, x_2) f_{x_1}(y_1) f_{x_2}(y_2)$$

$$\Rightarrow p(z_2 | z_1) = p(x_2, y_2 | x_1, y_1) = p(x_2 | x_1) f_{x_2}(y_2)$$

Chaîne de Markov cachée à bruit indépendant : **CMC-bi**



Chaîne de Markov Couple (CMCo)

$\mathbf{Z}=(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ est une chaîne de Markov stationnaire

$$p(\mathbf{z}) = \pi(z_1) \prod_{n=1}^{N-1} a(z_n, z_{n+1})$$
$$p(z_1, z_2) = p(x_1, x_2) \underbrace{p(y_1, y_2 | x_1, x_2)}_{f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)}$$

Loi initiale

$$p(z_1) = \sum_{x_2 \in \Omega} p(x_1, x_2) \int_{\mathbb{R}} f_{x_1, x_2}(y_1, y_2) dy_2 = \sum_{x_2 \in \Omega} p(x_1, x_2) f_{x_1, x_2}(y_1)$$

Loi stationnaire

$$p(z_2 | z_1) = \frac{p(z_1, z_2)}{p(z_1)}$$

\mathbf{X} n'est pas une chaîne de Markov

$\mathbf{X} | \mathbf{Y}$ est une chaîne de Markov

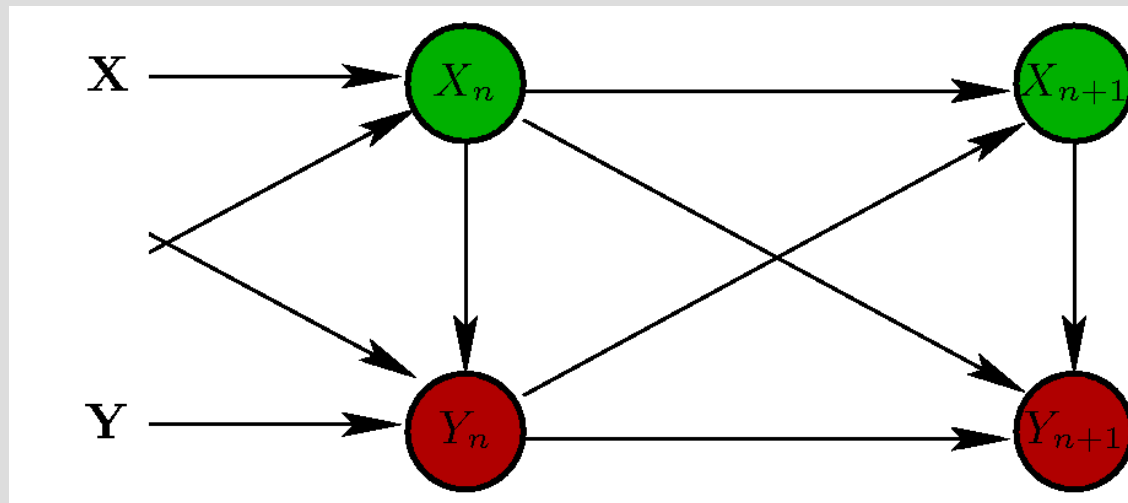
 La restauration de \mathbf{X} reste possible.

Localement

$$p(z_2|z_1) = p(x_2|x_1, y_1) p(y_2|x_2, x_1, y_1)$$

$$(p(z_2|z_1) = p(x_2|x_1) f_{x_2}(y_2))$$

Rappel CMC-bi)



~~H3 : $p(y_n|\mathbf{x}) = p(y_n|x_n) = f_{x_n}(y_n)$ - lois d'attache aux données~~

Le bruit $p(y_2|x_2, x_1)$ dépend de x_2 et x_1 .

➔ $f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)$ Lois d'attache aux données adaptées aux transitions de classes (frontières)

Chaîne de Markov Cachée (CMCa)

$Z = (X, Y)$ est une chaîne de Markov stationnaire

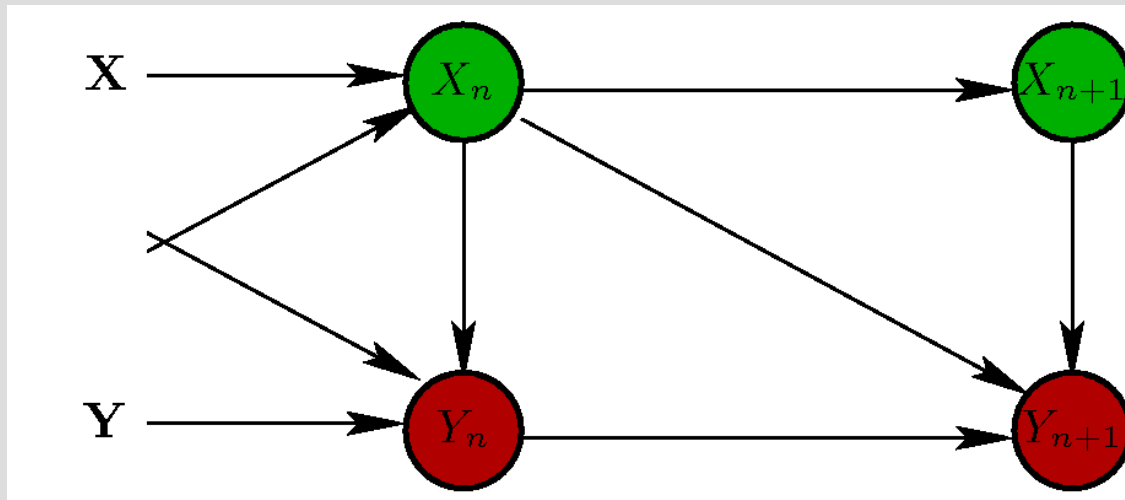
& X est une chaîne de Markov stationnaire

Localement

$(p(z_2|z_1) = p(x_2|x_1, y_1) p(y_2|x_2, x_1, y_1)$ Rappel CMCo)

$p(z_2|z_1) = p(x_2|x_1) p(y_2|x_1, x_2, y_1)$

$(p(z_2|z_1) = p(x_2|x_1) p(y_2|x_2)$ Rappel CMC-bi)



Plan de l'exposé

- Chaînes de Markov Cachées
 - CMC à bruit indépendant (CMC-bi)
 - Chaîne de Markov couple (CMCo)
 - Chaîne de Markov Cachée (CMCa)
- Copules
 - Définition et exemples
 - Copules dans les CMCo et CMCa
- Résultats de segmentation
 - Image simulée
 - Image satellitaire

Les copules

CMCa ou CMCo

$$p(z_1, z_2) = p(x_1, x_2) \underbrace{p(y_1, y_2 | x_1, x_2)}_{f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)}$$

La lois d'attache aux données $f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)$ correspondante à la classe x_1 représente notre connaissance des phénomènes physiques observés. Une classe est caractérisée par

1. Le comportement des deux composantes y_1, y_2 ,
2. La façon dont ces composantes sont liées.

 Utilisation des copules pour modéliser la dépendance entre les lois marginales

Définition : Une copule bi-variée est une FdR sur le carré unité avec des marges uniformes.

Théorème d'existence de Sklar : Soient F_1 et F_2 , les FdR de deux V.A. X_1, X_2 . Soit F , la FdR correspondante sur \mathbb{R}^2 , alors il existe une copule C telle que :

$$F(y_1, y_2) = C(F_1(y_1), F_2(y_2))$$

Si la copule est dérivable, nous écrivons:

$$f(y_1, y_2) = \underbrace{f_1(y_1) f_2(y_2)}_{\text{indépendance}} \underbrace{c(F_1(y_1), F_2(y_2))}_{\text{lien statistique}}$$

avec c la densité de la copule.

$$f(y_1) = \int f(y_1, y_2) dy_2$$

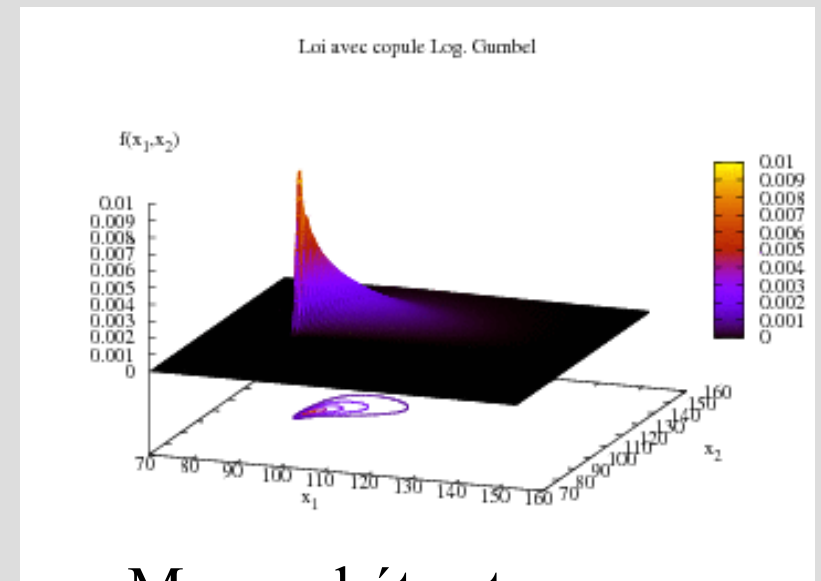
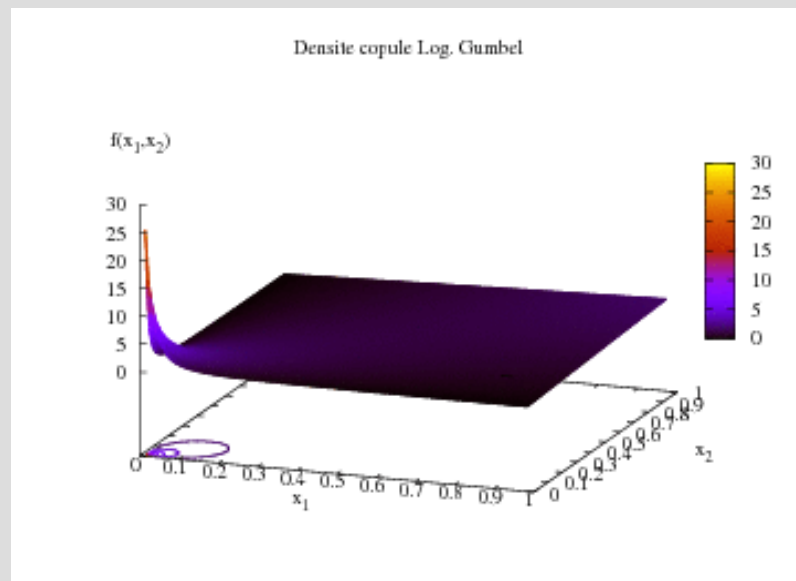
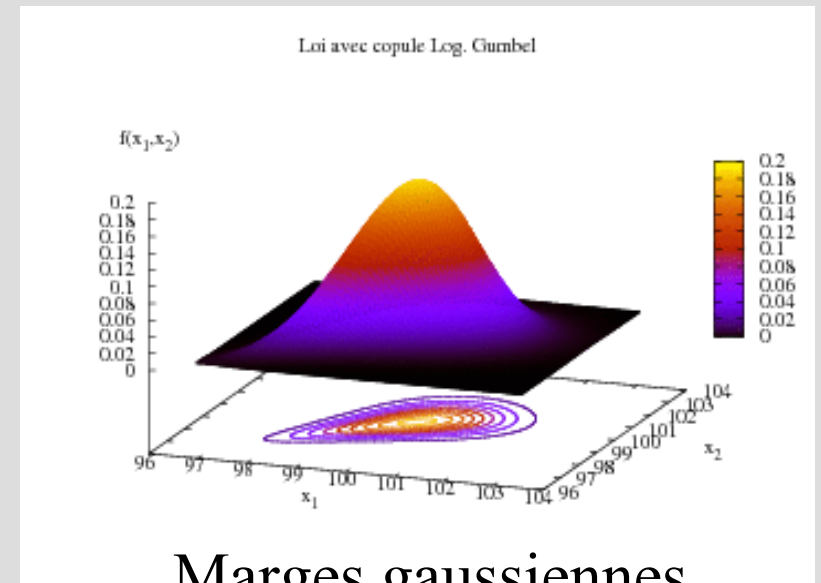
Conclusion : Nous pouvons construire des lois 2D avec des marges données.

Exemples de copules

- Copule Log. de Gumbel

Densité

$$c(y_1, y_2) = \frac{2 y_1 y_2}{(y_1 + y_2 - y_1 y_2)^3}$$

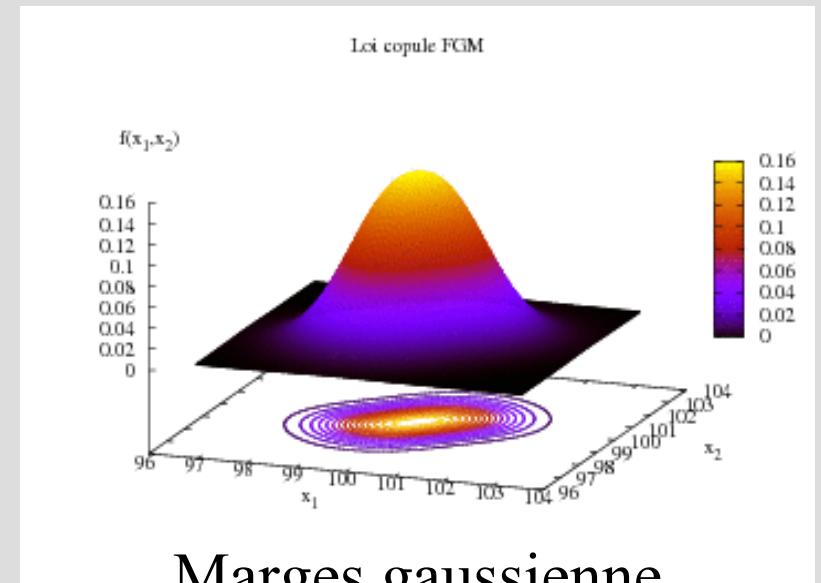
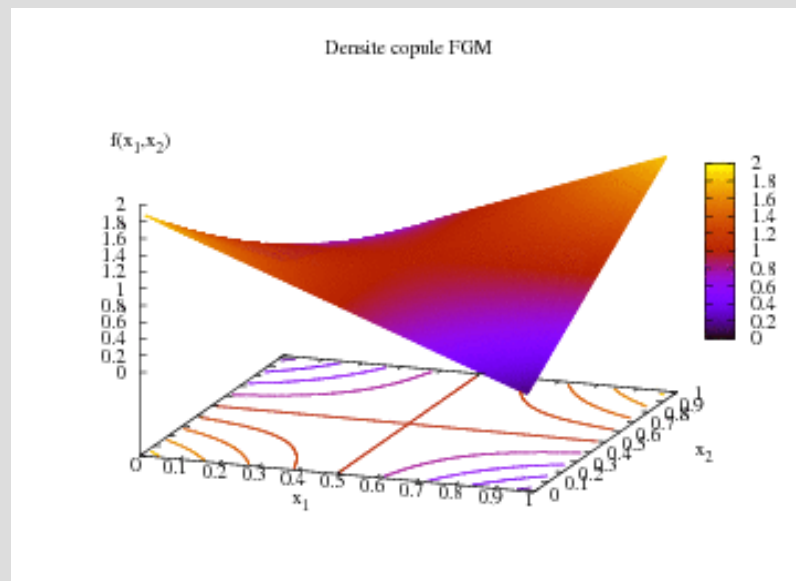


- Copule FGM
(Farlie-Gumbel-Mogernstern)

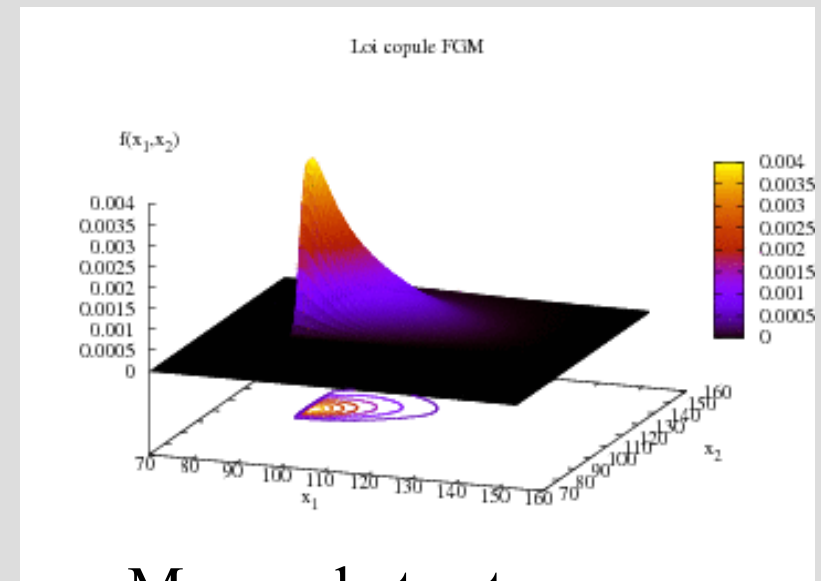
Densité

$$c(y_1, y_2) = 1 + \theta (1 - 2y_1)(1 - 2y_2)$$

$$\theta \in [-1, 1]$$



Marges gaussienne



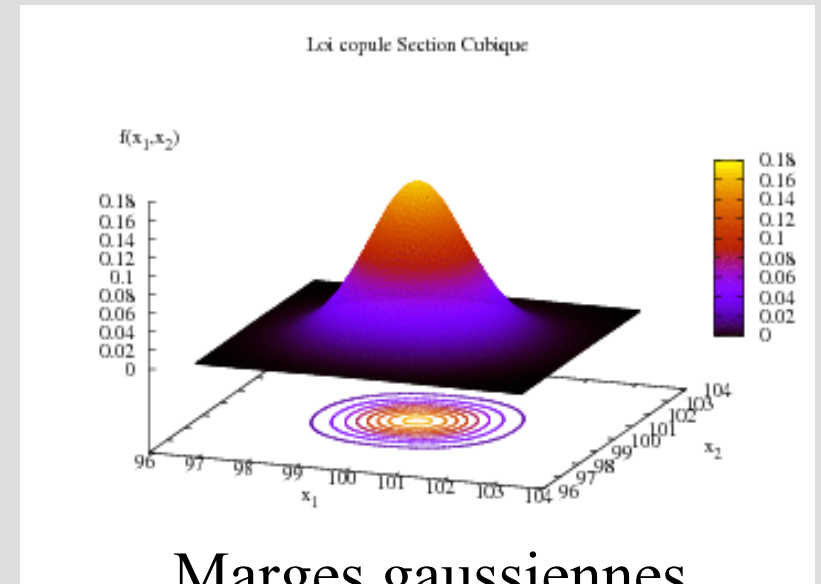
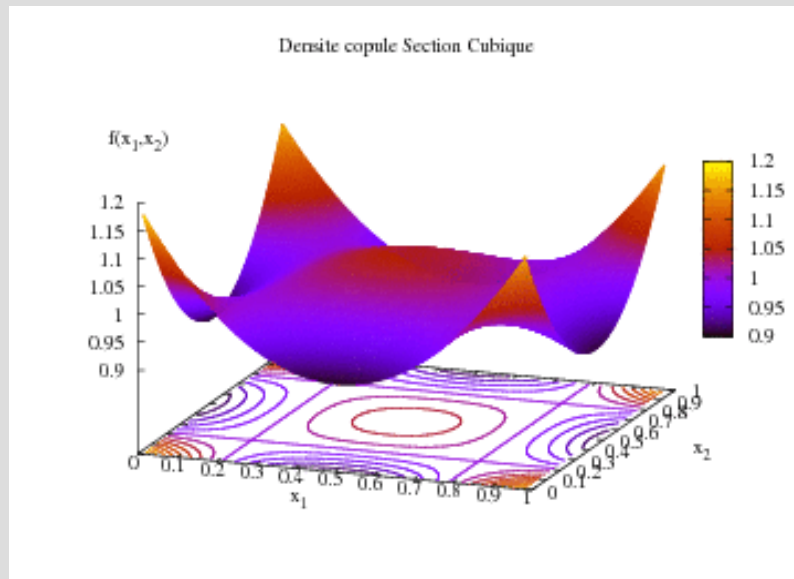
Marges beta et gamma

- Copule à section cubique

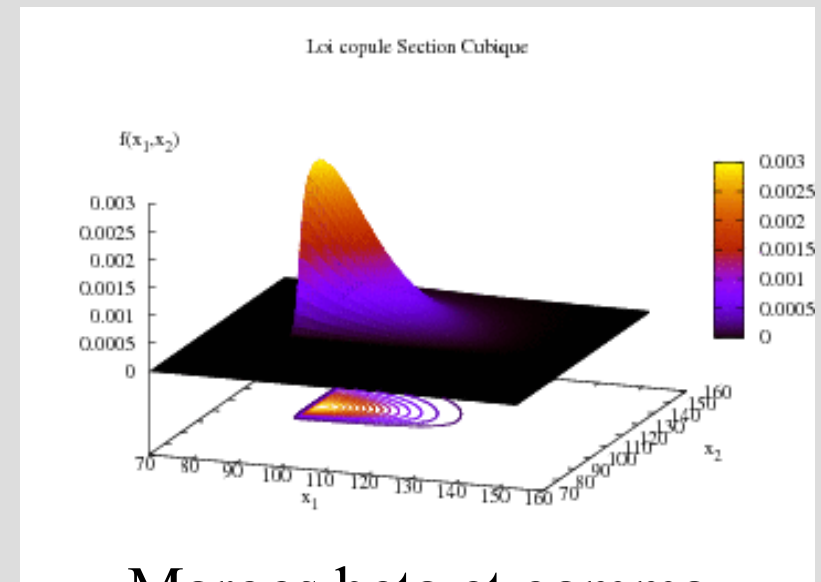
Densité

$$c(y_1, y_2) = 1 + \theta (6y_1^2 - 6y_1 + 1) (6y_2^2 - 6y_2 + 1)$$

$$\theta \in [0, 0.25]$$



Marges gaussiennes



Marges beta et gamma

- Copule gaussienne

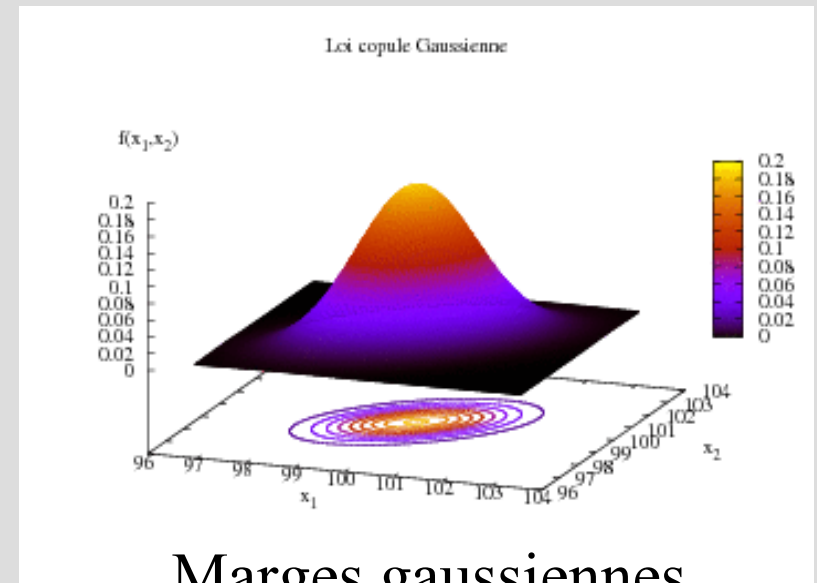
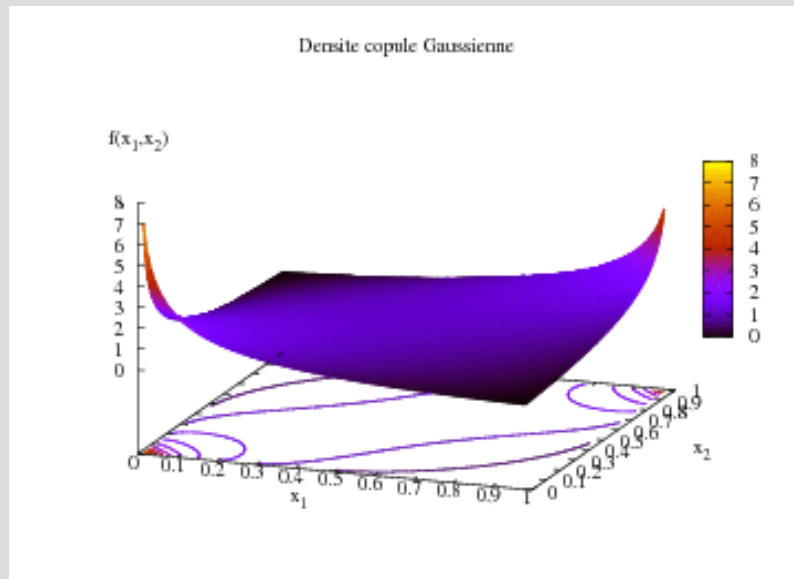
Densité

$$c(y_1, y_2) = |\boldsymbol{\rho}|^{-0.5} \exp(0.5 \boldsymbol{\zeta}^t (\boldsymbol{\rho}^{-1} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\zeta})$$

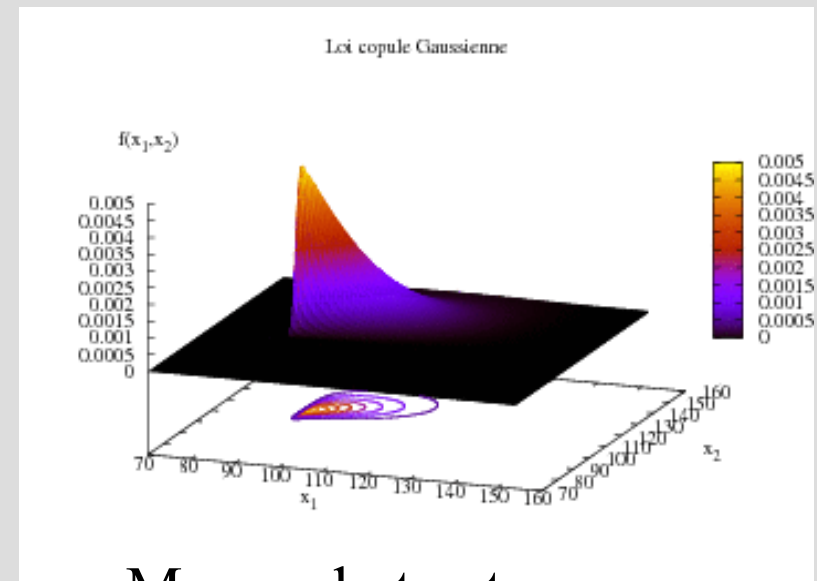
$\boldsymbol{\rho}$ Matric de corrélation

$$\boldsymbol{\zeta} = (\phi^{-1}(y_1), \phi^{-1}(y_2))$$

ϕ Fdr d'une Gaussienne centrée réduite



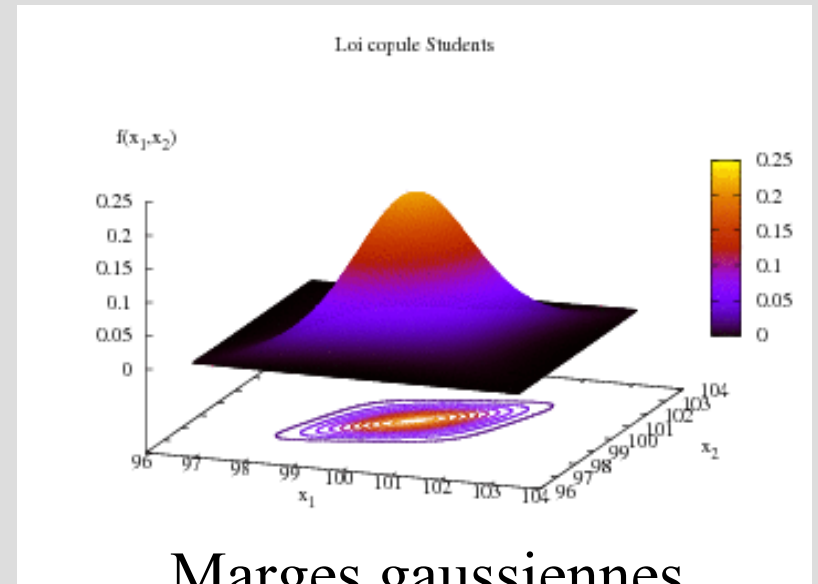
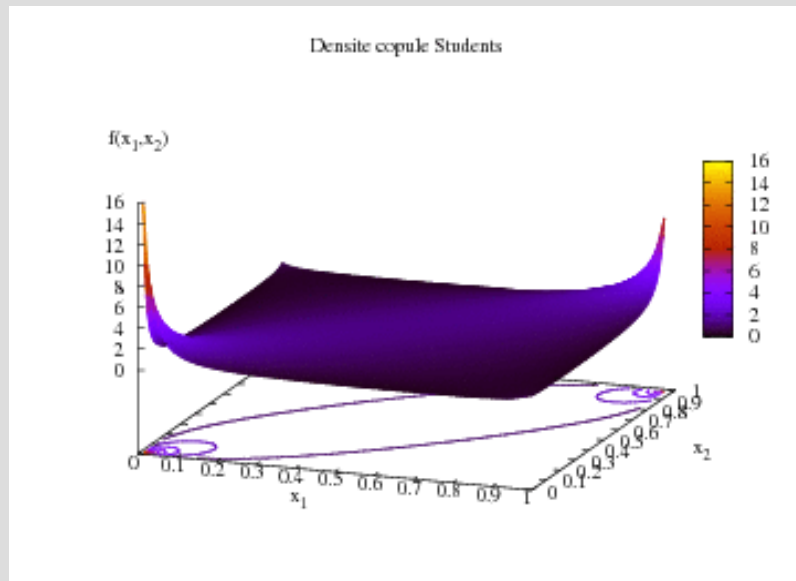
Marges gaussiennes



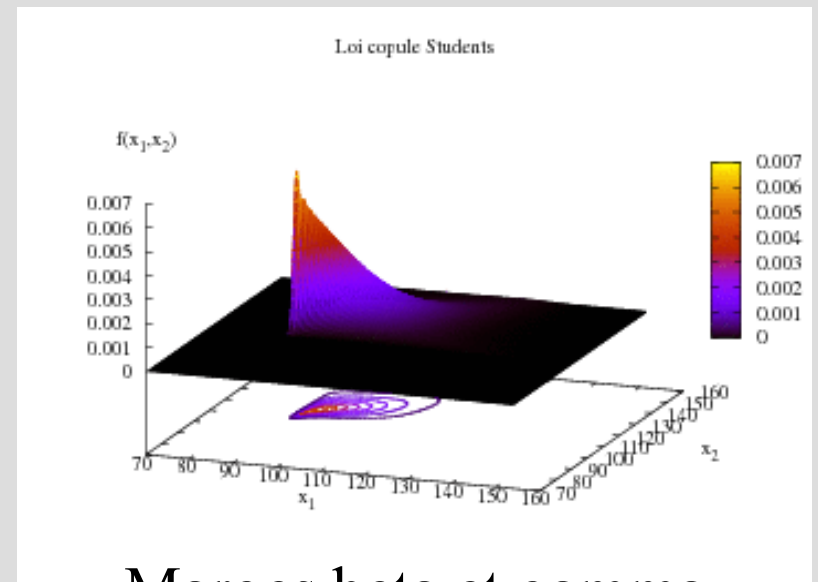
Marges beta et gamma 16

- Copule de Student

Densité



Marges gaussiennes



Marges beta et gamma

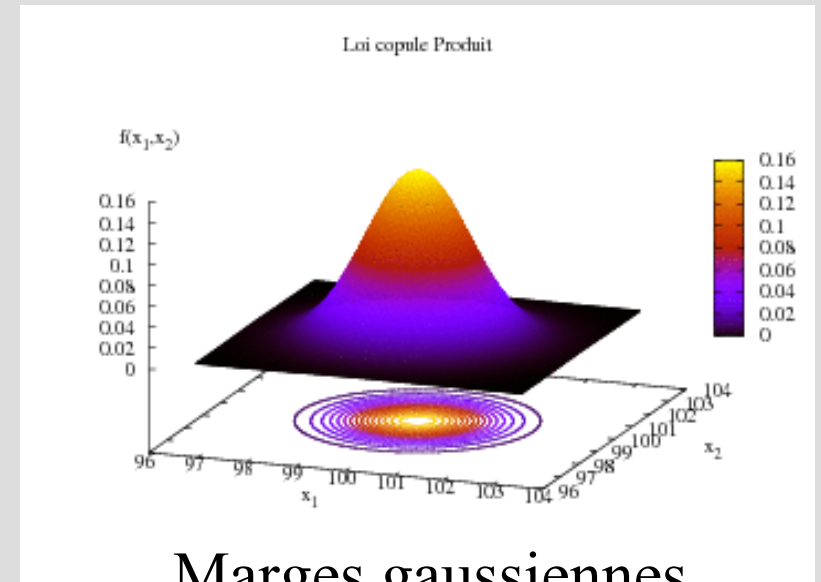
- Copule Produit

FdR

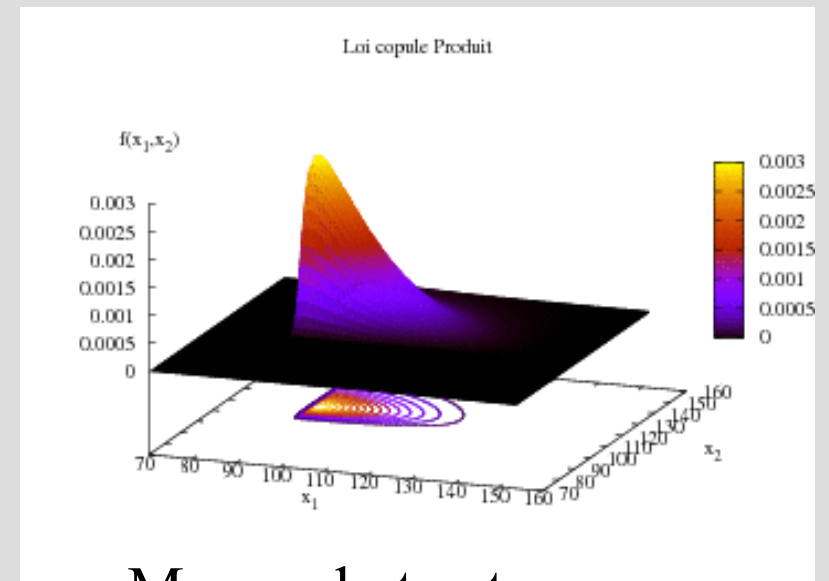
$$C(y_1, y_2) = y_1 y_2$$

Densité

$$c(y_1, y_2) = 1$$



Marges gaussiennes



Marges beta et gamma

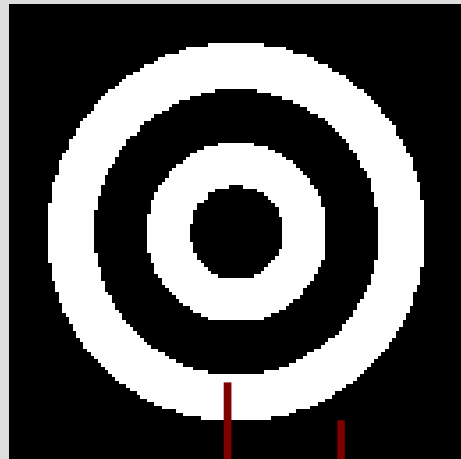
Modélisation des lois d'attache

	Copule	Lois marginales
<p>CMC-bi $f_{x_1, x_2}(y_1, y_2) = f_{x_1}(y_1) f_{x_2}(y_2)$</p>	0	K $f_{x_1}(y_1)$
<p>CMCo $f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)$</p>	K^2	$f_{x_1, x_2}(y_1) = f_{x_2, x_1}(y_2)$ Réversibilité $p(z_1 = a, z_2 = b) = p(z_1 = b, z_2 = a)$
<p>CMCa $f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)$</p>	K^2	K $f_{x_1, x_2}(y_1) = f_{x_1}(y_1)$

Plan de l'exposé

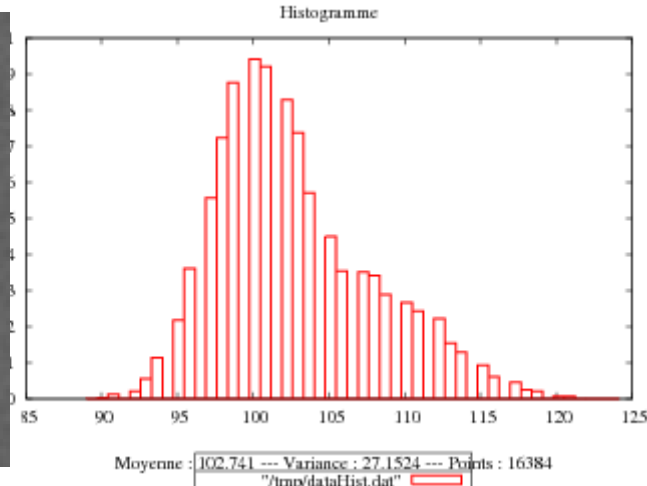
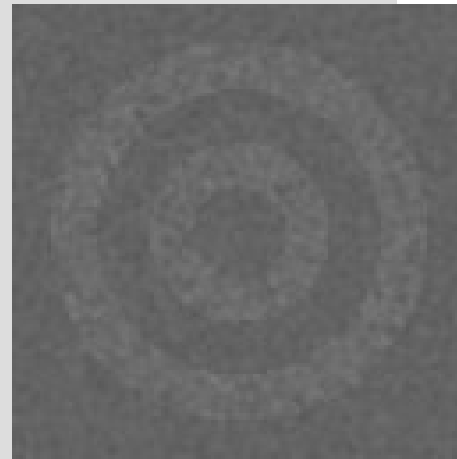
- Chaînes de Markov Cachées
 - CMC à bruit indépendant (CMC-bi)
 - Chaîne de Markov couple (CMCo)
 - Chaîne de Markov Cachée (CMCa)
- Copules
 - Définition et exemples
 - Copules dans les CMCo et CMCa
- Résultats de segmentation
 - Image simulée
 - Image satellitaire

Test sur une image simulée



Filtre

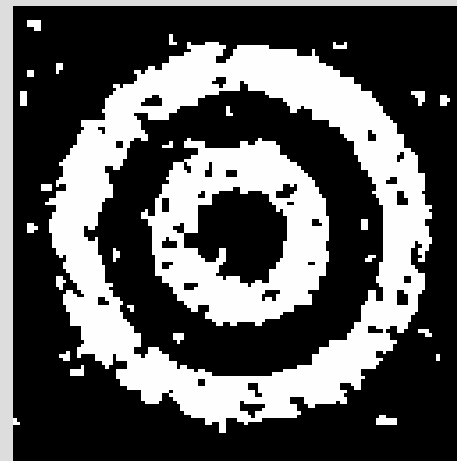
$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1.0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$



$$N(100,60)$$

$$N(108,110)$$

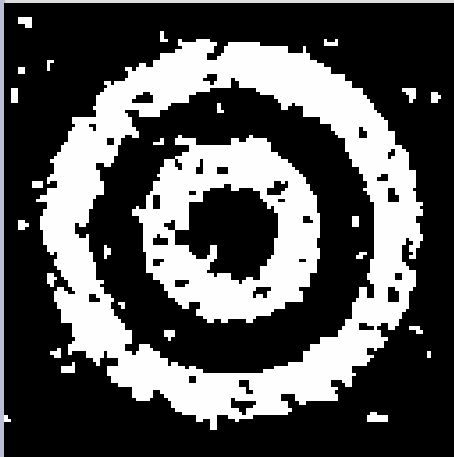
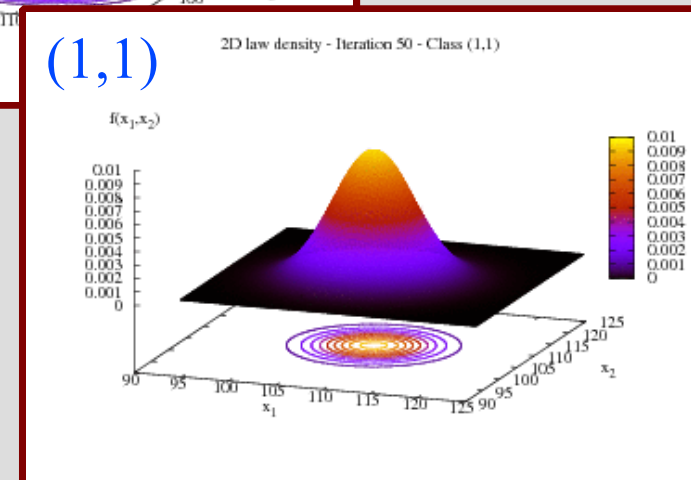
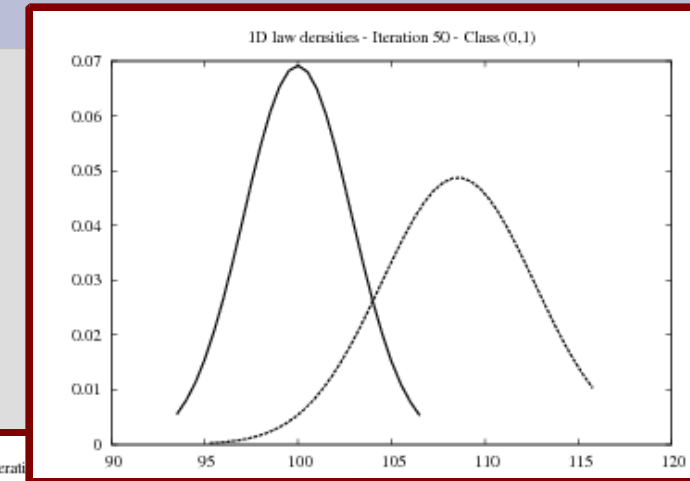
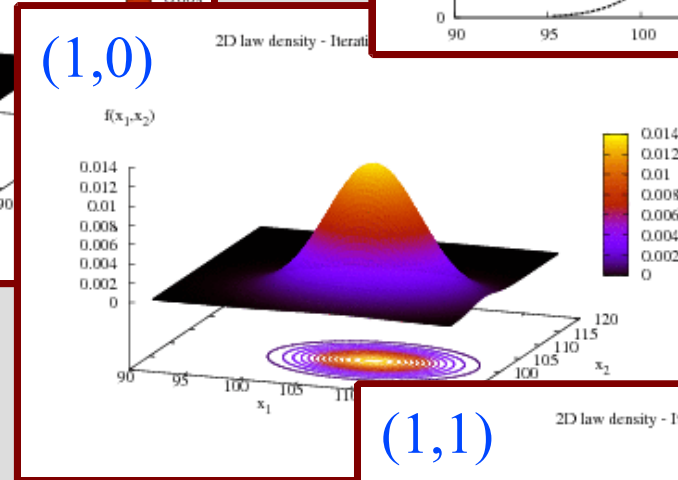
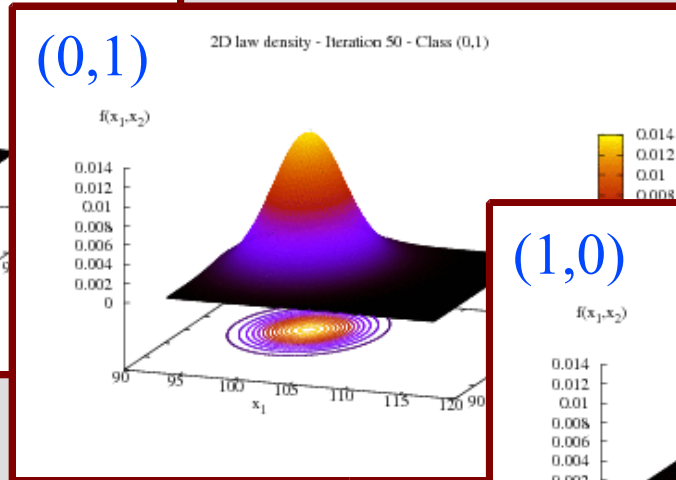
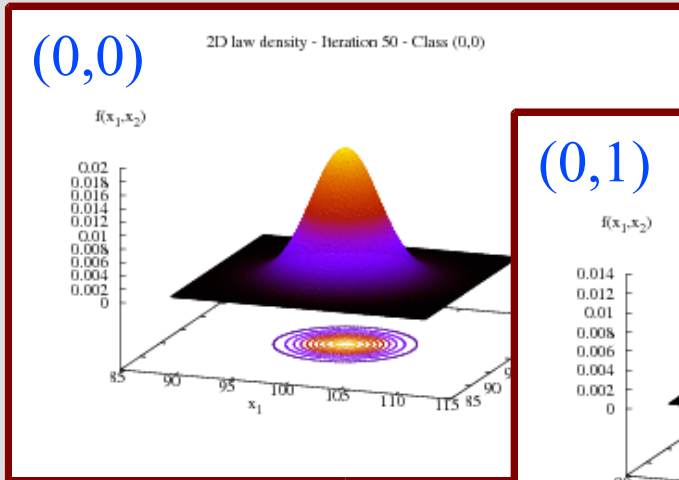
CMC-bi



$t = 1 \text{ sec.}$
 $\tau = 5.93$

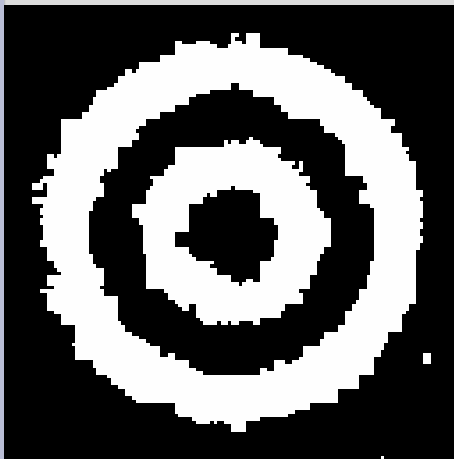
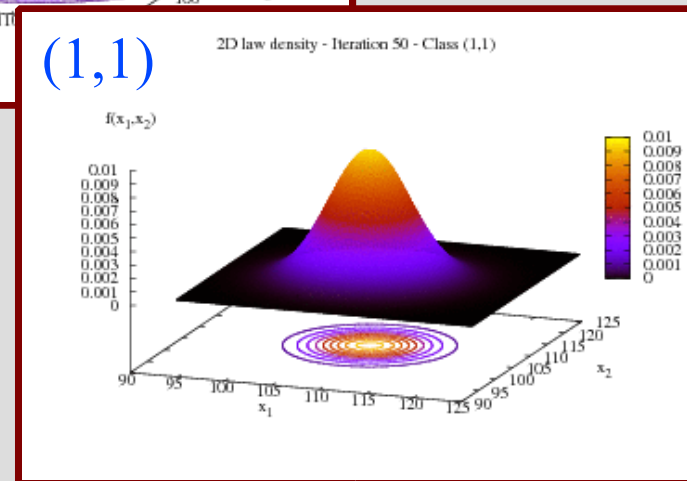
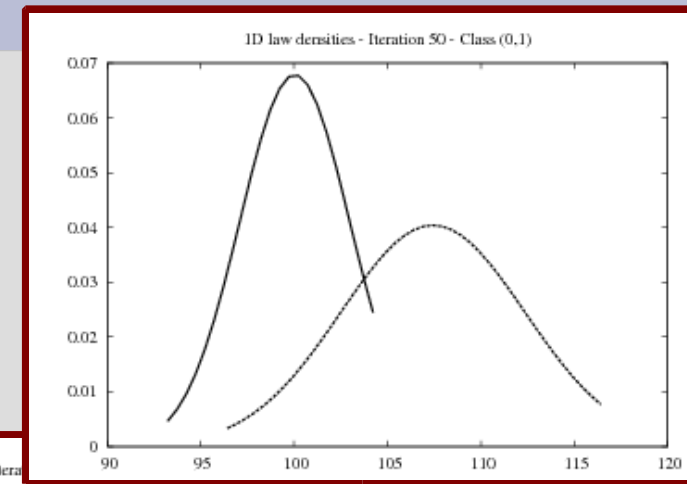
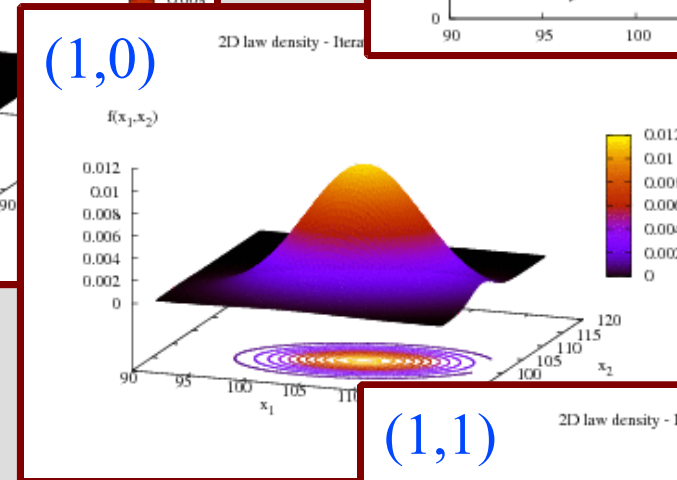
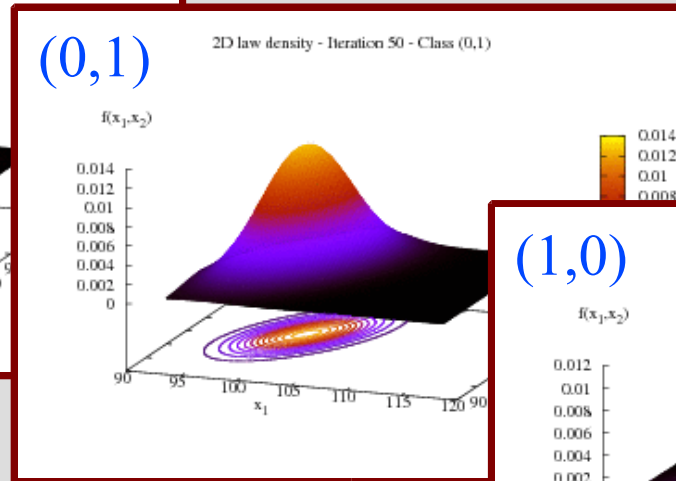
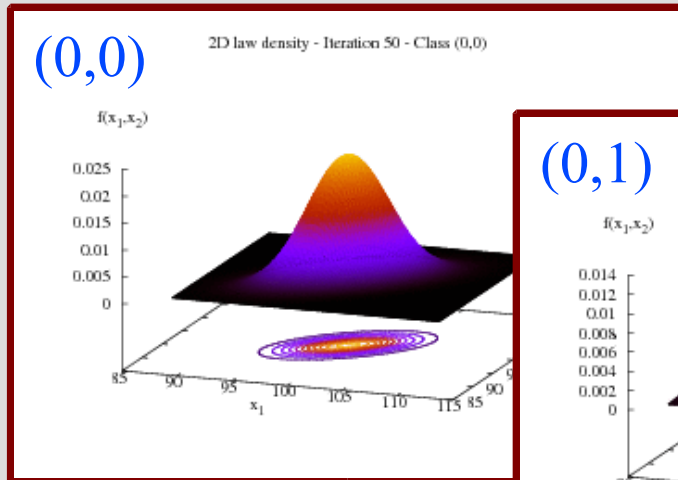
Méthode d'estimation : ICE
Nbre d'itérations : 50

Copule produit



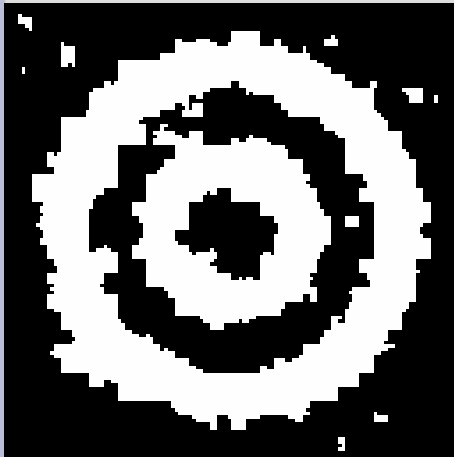
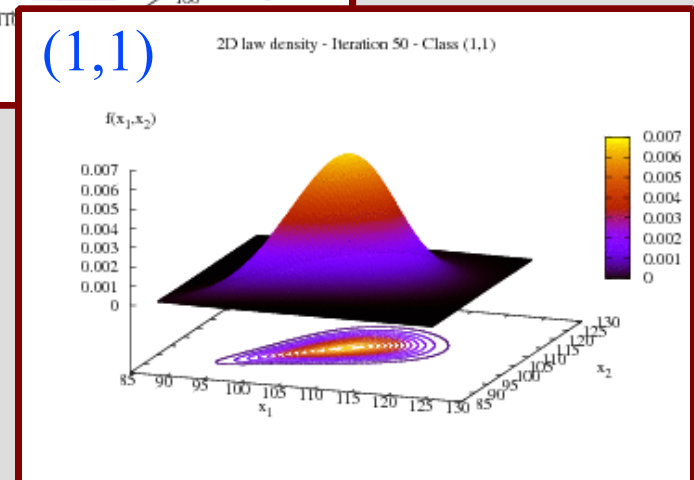
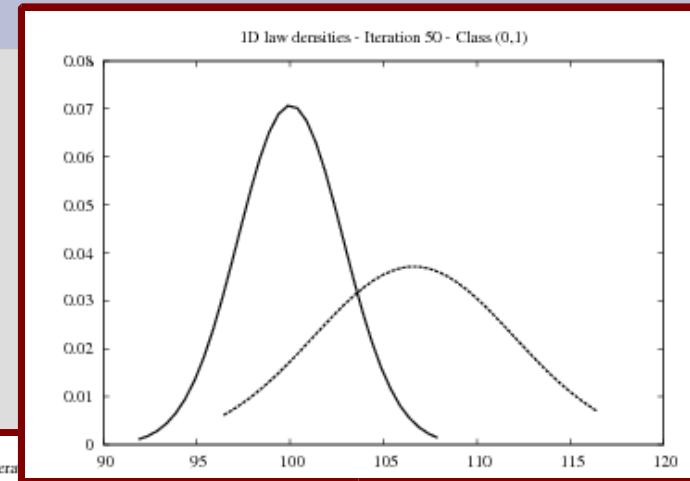
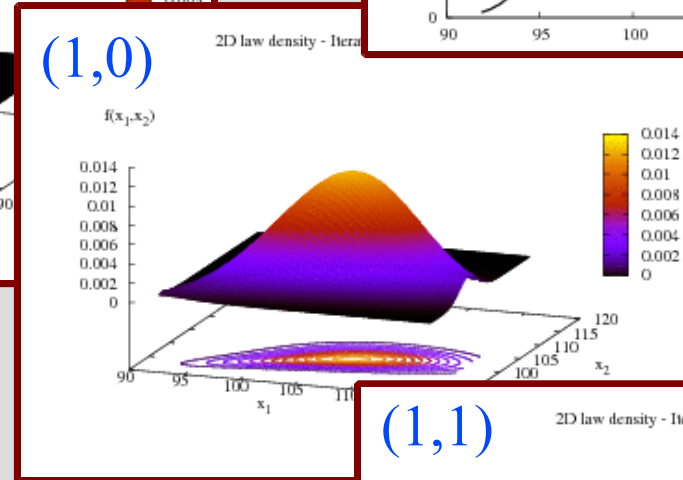
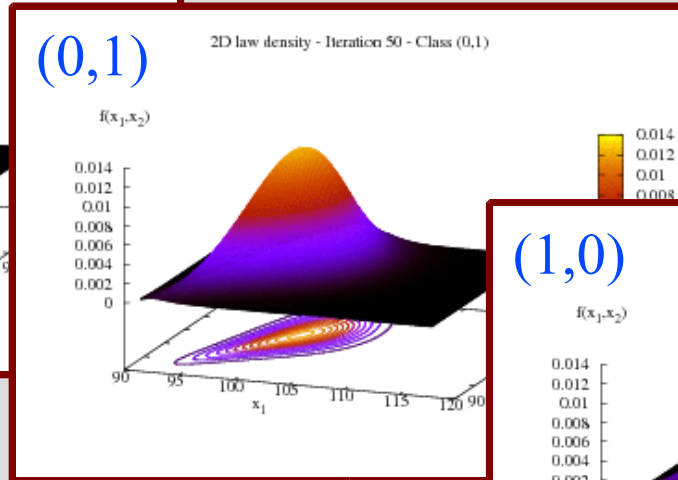
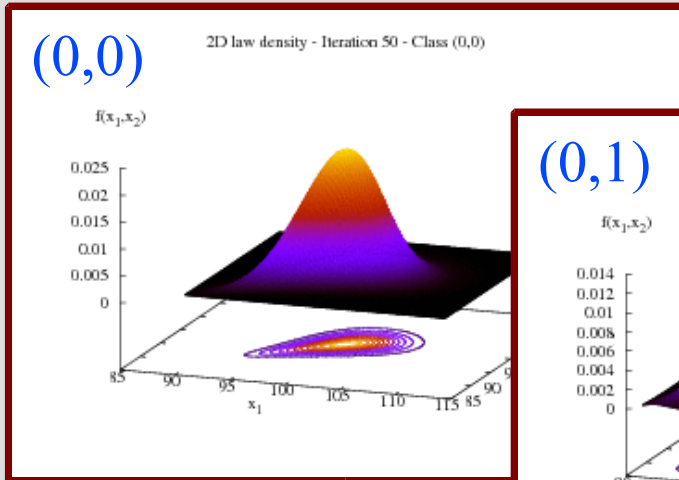
$t=38\text{sec.}$
 $\tau=5.96$

Copule gaussienne



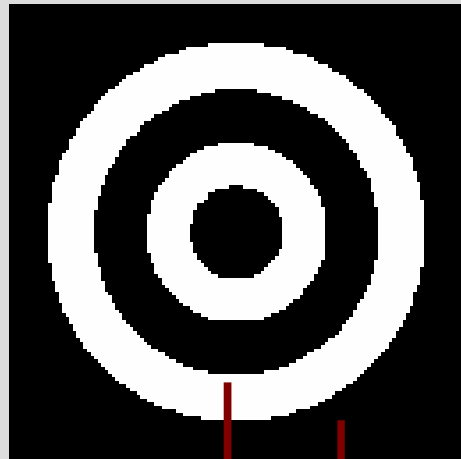
$t = 40\text{sec.}$
 $\tau = 4.64$

Copule logistique de Gumbel



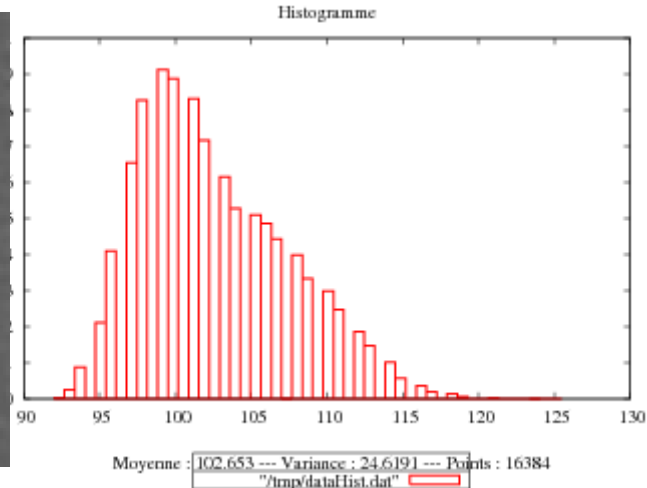
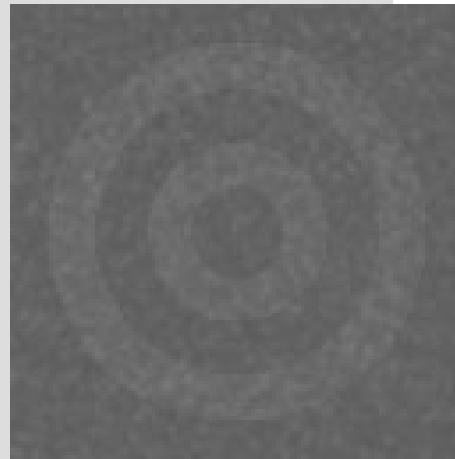
$t = 39 \text{ sec.}$
 $\tau = 8.44$

Test 2



Filtre

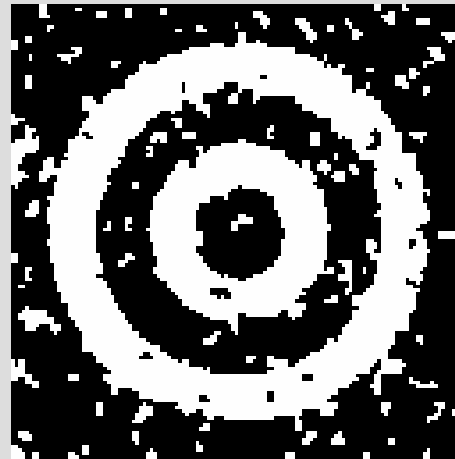
$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1.0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$$



Gamma

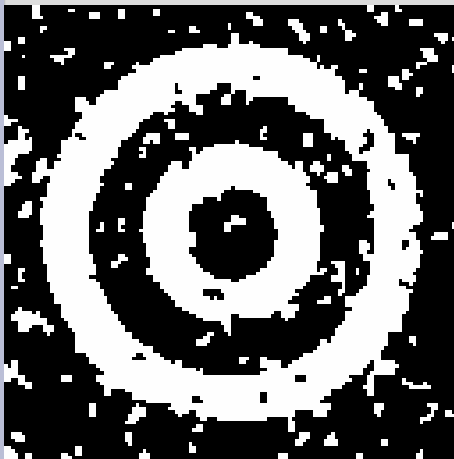
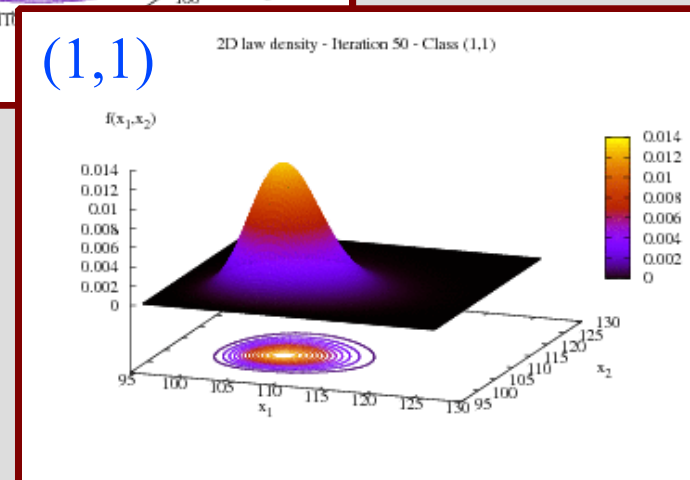
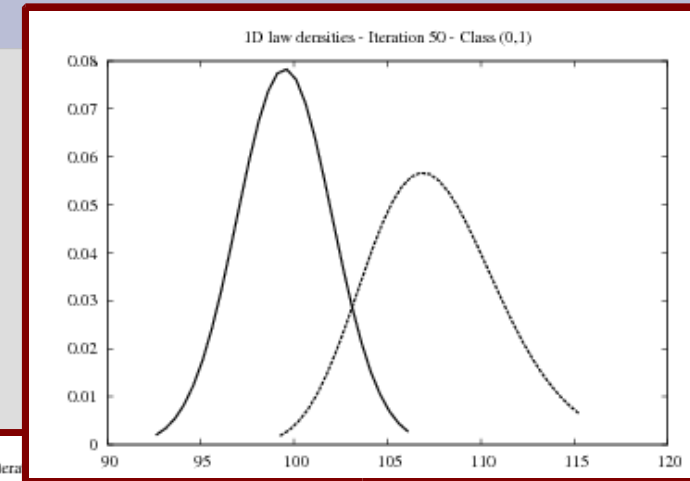
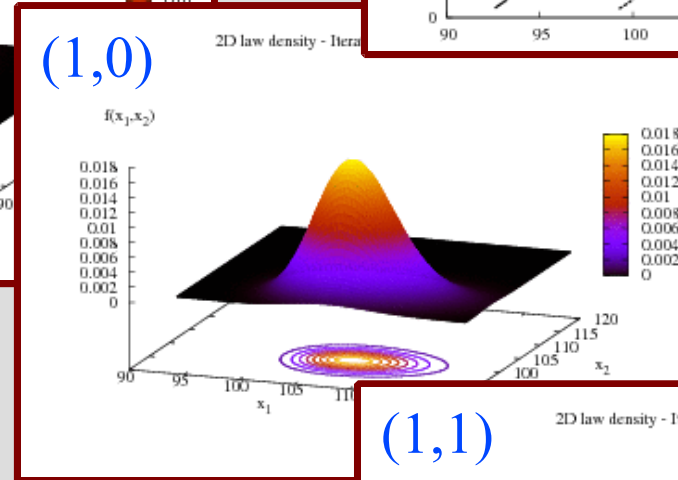
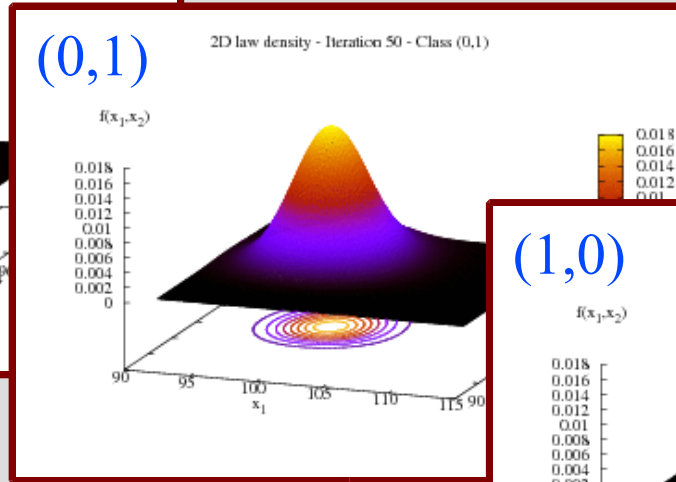
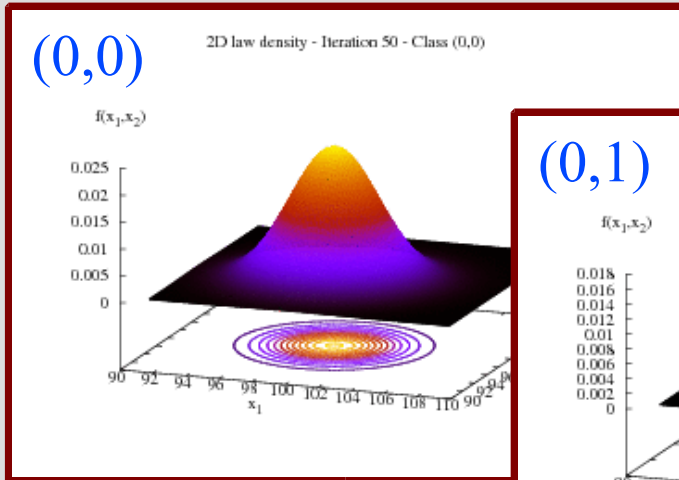
Gamma

CMC-bi



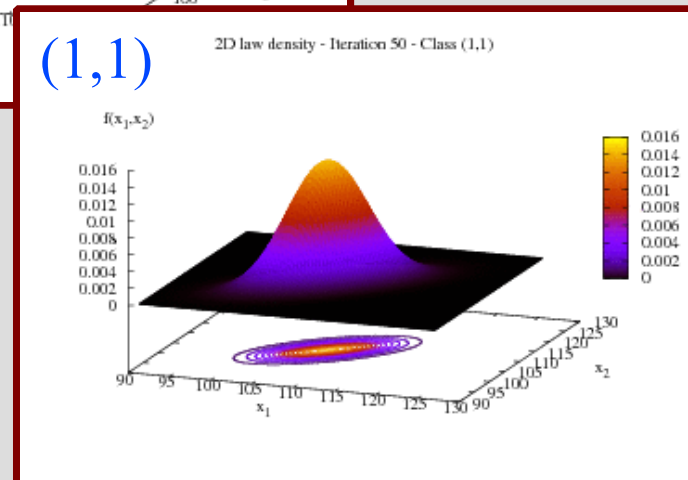
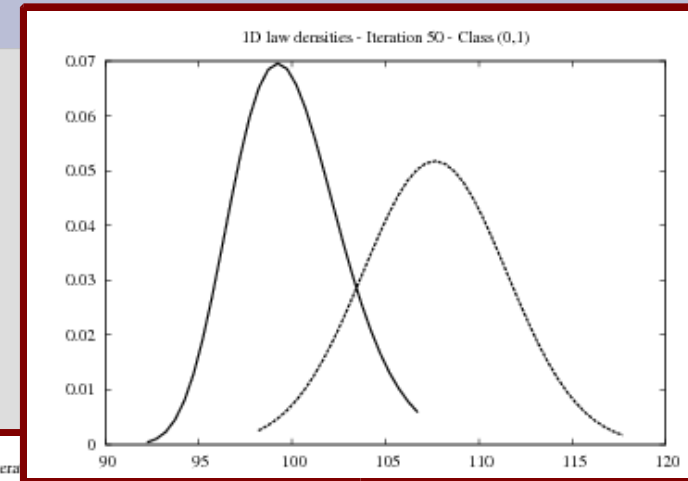
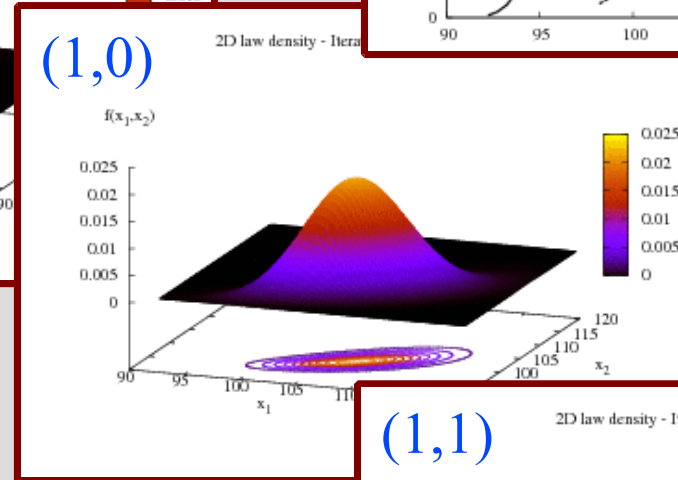
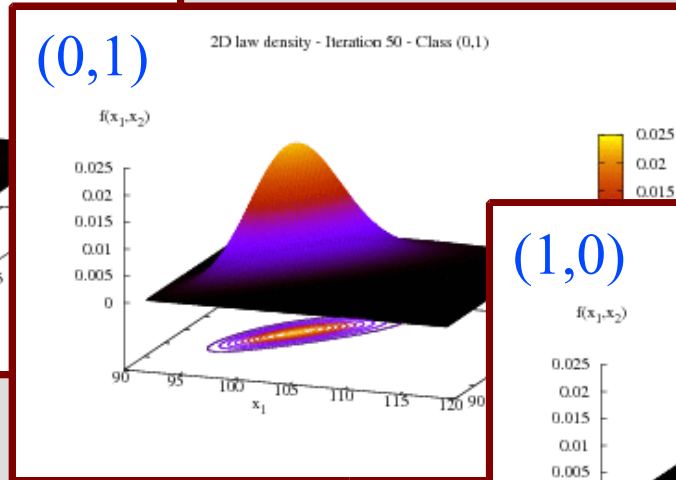
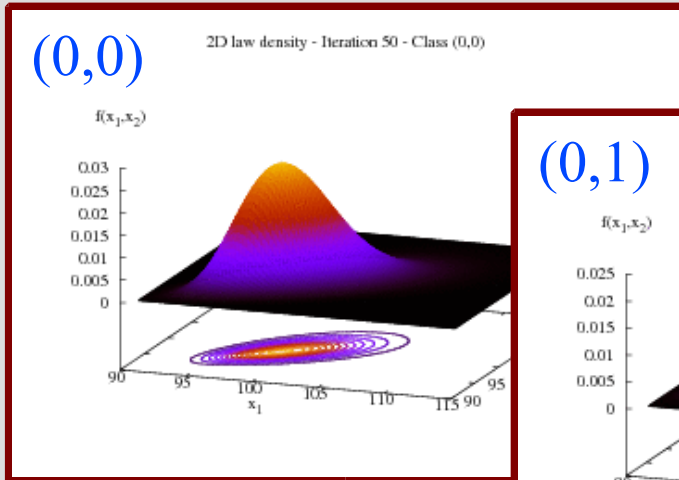
$t = 7 \text{ sec.}$
 $\tau = 8.58$

Copule produit



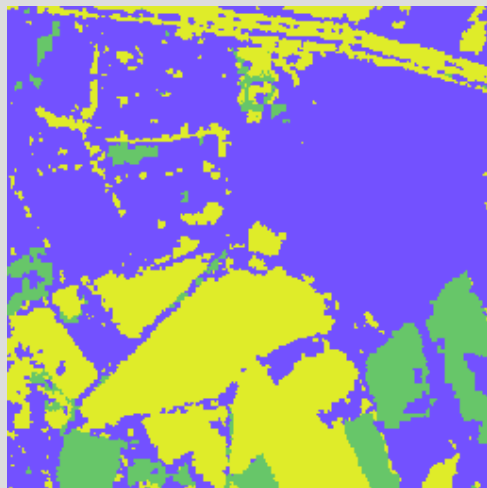
$t = 139 \text{ sec.}$
 $\tau = 8.51$

Copule gaussienne



$t = 201 \text{ sec.}$
 $\tau = 3.30$

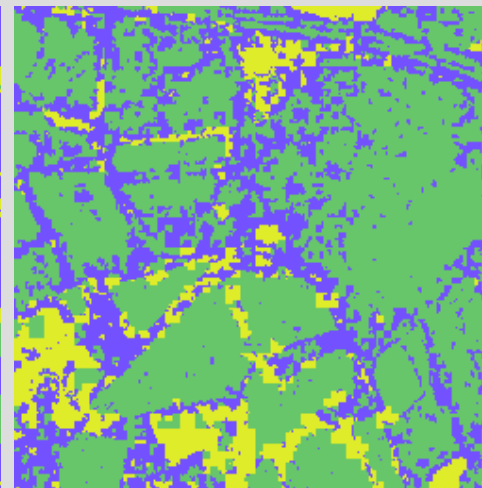
Image réelle



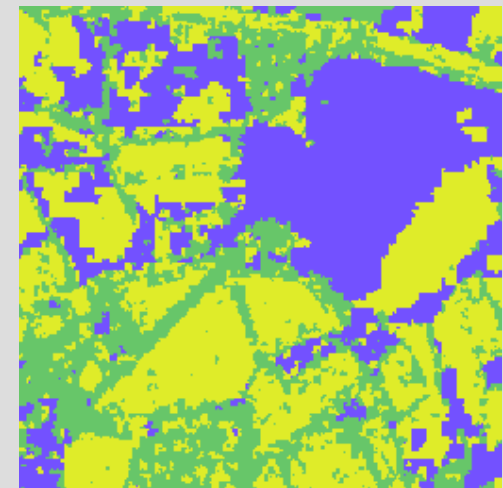
CMC-bi



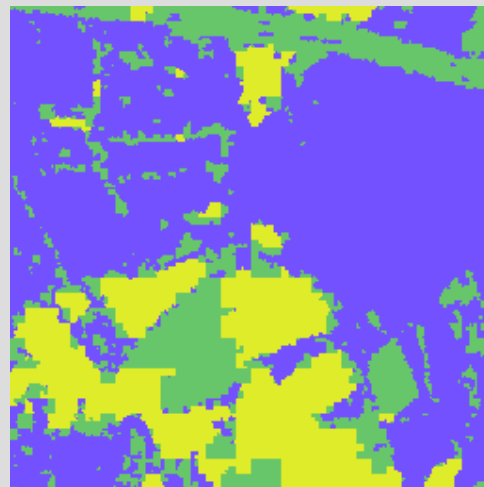
CMCa
Cop. Produit



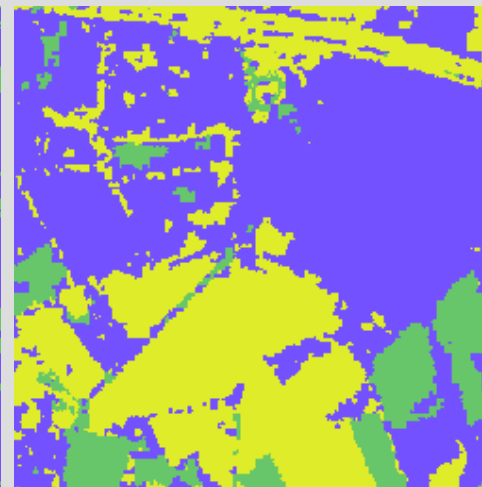
CMCa
Cop. Géussienne



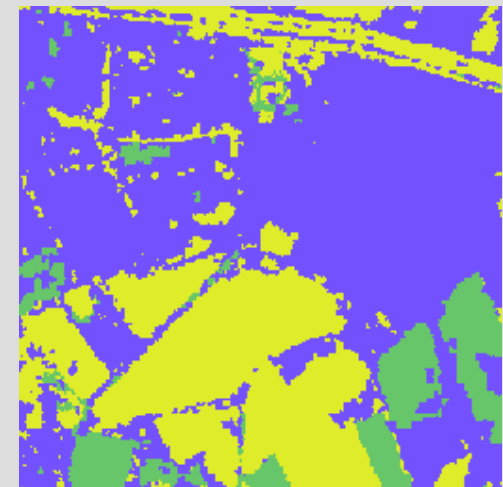
CMCa
Cop. Student



CMCa
Cop. Log. Gumbel



CMCa
Cop. FGM



CMCa
Cop. cubique

Conclusion

- $CMC_{bi} \ll CMC_{Ca} \ll CMC_{Co}$
 - Lois aux frontières des classes
 - Temps de calculs plus importants (estimation)
- Copules
 - Accès direct aux marginales (\ll ACP, ACI)
 - Tps de calculs \ll ACI.
 - Grande variété de dépendence disponible. Quelle dépendence ?
 - Comment choisir la copule adaptée à un problème ?