

# Quelques modèles de CMC

## Appliqués à la segmentation d'images

Stéphane Derrode

Institut Fresnel (UMR 6133), Équipe GSM  
École Centrale Marseille  
`stephane.derrode@fresnel.fr`

**PHARES'08**  
PHénomènes Aléatoires  
pour la REprésentation des imageS

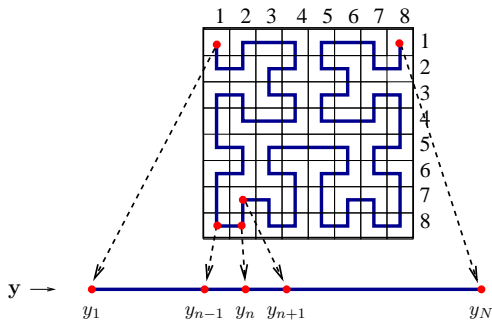
# Modèle 1D et images 2D



Image originale  $y$



Image segmentée  $x$



- 1 Chaîne de Markov Cachées et Extensions
  - Le modèle original
  - Extension vectorielle
  - Extension floue
  
- 2 Autres topologies de CMC
  - CMC d'ordre  $R - S$
  - Chaîne de Markov Couple
  
- 3 Vers d'autres modèles...

# Où en sommes-nous ?

## 1 Chaîne de Markov Cachées et Extensions

- Le modèle original
- Extension vectorielle
- Extension floue

## 2 Autres topologies de CMC

- CMC d'ordre  $R - S$
- Chaîne de Markov Couple

## 3 Vers d'autres modèles...

# Le modèle original

- Processus des observations :  $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_N\}$ ,  $Y_n \in \mathbb{R}$ .
- Processus (caché) des classes :  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$ ,  
 $X_n \in \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$ .
- Chaîne de Markov :  $p(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = p(X_{n+1} | X_n)$ .

## Décision bayésienne

$$\hat{\mathbf{x}}^{OPT}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}} \in \Omega^N} E[L(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$$

- MAP :  $\hat{\mathbf{x}}^{MAP}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega^N} p(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$
- MPM :  $\hat{x}_n^{MPM}(\mathbf{y}) = \arg \max_{x_n \in \Omega} p(X_n = x_n | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$

# Le modèle original

- Processus des observations :  $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_N\}$ ,  $Y_n \in \mathbb{R}$ .
- Processus (caché) des classes :  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$ ,  
 $X_n \in \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$ .
- Chaîne de Markov :  $p(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = p(X_{n+1} | X_n)$ .

## Décision bayésienne

$$\hat{\mathbf{x}}^{OPT}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}} \in \Omega^N} E[L(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$$

- MAP :  $\hat{\mathbf{x}}^{MAP}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega^N} p(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$
- MPM :  $\hat{x}_n^{MPM}(\mathbf{y}) = \arg \max_{x_n \in \Omega} p(X_n = x_n | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$

# Hypothèses

## Hypothèses

[H1]  $\mathbf{X}$  et une chaîne de Markov stationnaire

- Loi initiale :  $\pi_j = p(X_1 = j)$
- Loi stationnaire :  $a_{j|i} = p(X_2 = j | X_1 = i)$  (matrice de transition  $\mathbf{A}$ )

[H2] Les V.A.  $Y_n$  sont indépendantes conditionnellement à  $\mathbf{X}$ .

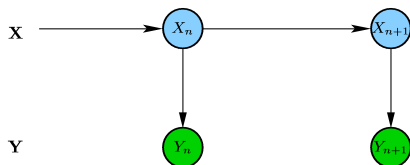
$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{n=1}^N p(y_n | \mathbf{x})$$

[H3]  $p(y_n | \mathbf{x}) = p(y_n | x_n) = f_{x_n}(y_n)$  (loi d'attache aux données)

$$p(\mathbf{x}) = \pi_{x_1} \prod_{n=1}^{N-1} a_{x_{n+1}|x_n},$$

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi_{x_1} f_{x_1}(y_1) \prod_{n=1}^{N-1} a_{x_{n+1}|x_n} f_{x_{n+1}}(y_{n+1}).$$

# Structure de dépendance

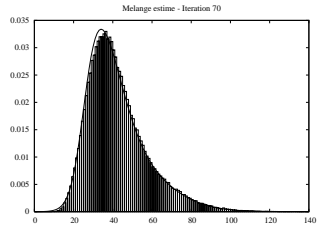
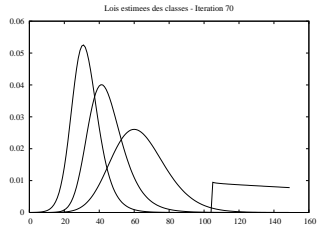
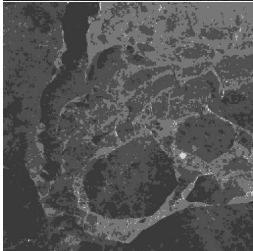
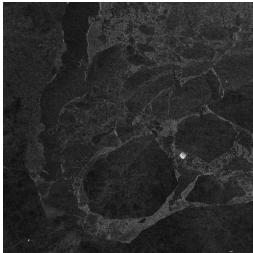


$$p(x_{n+1}, y_{n+1} | x_n, y_n) = p(x_{n+1} | x_n) f_{x_{n+1}}(y_{n+1})$$

## Algorithmes de référence

- Estimation (non supervisée) : EM/SEM/ICE, basées sur l'algorithme "forward/backward" de [Baum](#) (1970), revu par [Devijver](#) (1985).
- Algorithme MAP (décodeur) : [Viterbi](#) (1967).
- Détails : [Rabiner](#), *A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition*, Proc. of the IEEE 77(2) :257-286, February 1989.

# Exemple : mer de glaces



# Où en sommes-nous ?

## 1 Chaîne de Markov Cachées et Extensions

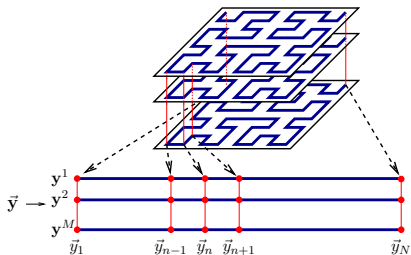
- Le modèle original
- **Extension vectorielle**
- Extension floue

## 2 Autres topologies de CMC

- CMC d'ordre  $R - S$
- Chaîne de Markov Couple

## 3 Vers d'autres modèles...

# CMC vectorielles (multicomposantes)

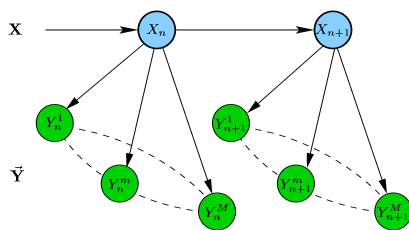


$$\vec{Y} = \{ \vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_N \},$$

$$\vec{Y}_n = (Y^1, \dots, Y^M)^t \in \mathbb{R}^M$$



# Structure de dépendance

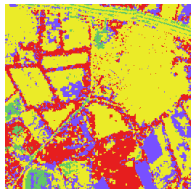


$$p(x_{n+1}, \vec{y}_{n+1} | x_n, \vec{y}_n) = p(x_{n+1} | x_n) f_{x_{n+1}}(\vec{y}_{n+1})$$

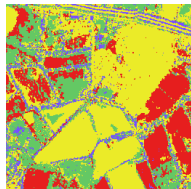
## Estimation des lois d'attache aux données

- Indépendance des bandes
- Analyse en composante principale
- Analyse en composantes indépendantes
- Copules (Gaussiennes, Franck, ...) : PHARES'07

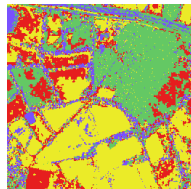
# Exemple



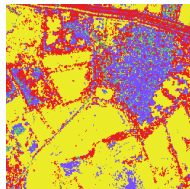
Cop. Produit



Cop. Gaussienne



Cop. Student



ACI

- Phénomène de Hughes
- Images multi-spectrale, multi-temporelle, multi-capteurs, multi-échelle, . . .

# Où en sommes-nous ?

## 1 Chaîne de Markov Cachées et Extensions

- Le modèle original
- Extension vectorielle
- Extension floue

## 2 Autres topologies de CMC

- CMC d'ordre  $R - S$
- Chaîne de Markov Couple

## 3 Vers d'autres modèles...

# CMC floues

## Flou dans les images

- Images intrinsèquement floues
- Flou de bougé

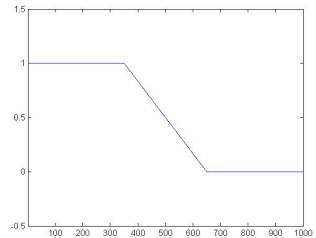
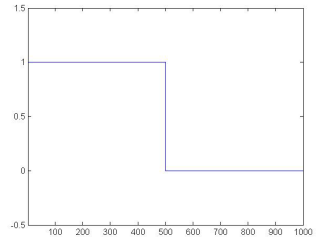
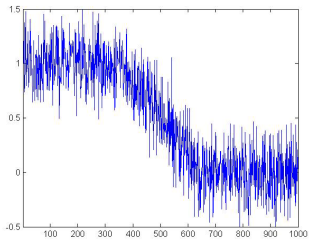


Nuage



Code barre 2D

# Objectifs



# Modélisation de $X$

$X_n$

Chaque variable aléatoire  $X_n$  est à valeur dans  $\Omega_f = [0, 1]$  et :

$$X_n = u \text{ avec } \begin{cases} u = 0 \text{ si le pixel appartient à la classe dure 0,} \\ u \in ]0, 1[ \text{ si le pixel est flou,} \\ u = 1 \text{ si le pixel appartient à la classe dure 1.} \end{cases}$$

$p(X_n)$

En prenant  $\nu = \delta_0 + \nu + \delta_1$  comme mesure sur  $\Omega_f$ , la distribution de  $X_n$  est définie par une densité  $h$  sur  $[0, 1]$  selon la mesure  $\nu$  :

$$p(X_n = u) = \begin{cases} \pi(0) = h(u = 0), \\ \pi(u) = h(u \in [a, b]) = \int_a^b h(\nu) d\nu(\nu), \text{ avec } 0 < a \leq b < 1, \\ \pi(1) = h(u = 1). \end{cases}$$

# Illustration

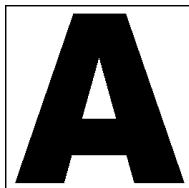


Image originale

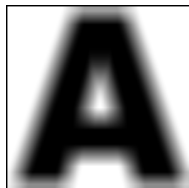


Image floue

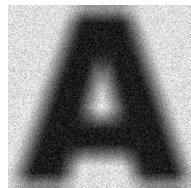
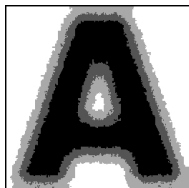
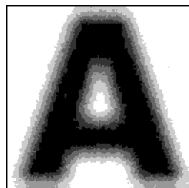


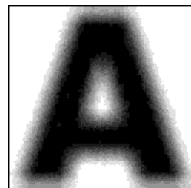
Image bruitée



$F = 2$



$F = 4$



$F = 9$

# Où en sommes-nous ?

## 1 Chaîne de Markov Cachées et Extensions

- Le modèle original
- Extension vectorielle
- Extension floue

## 2 Autres topologies de CMC

- CMC d'ordre  $R - S$
- Chaîne de Markov Couple

## 3 Vers d'autres modèles...

# Modèle $CMC_R$

## Hypothèse H1

[H1]  $\mathbf{X}$  et une chaîne de Markov stationnaire d'ordre  $R$

$$p(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = p(X_{n+1} | X_{n-R+1:n})$$

- **Matrice de transition d'ordre  $R$  :**  $\mathbf{A}^R$ ,  $n \geq R$ ,

$$a_{j|i_1, \dots, i_R}^R = p(X_{R+1} = j | X_1 = i_1, \dots, X_R = i_R),$$

- **Matrices de transition intermédiaires :**  $\mathbf{A}^n$ ,  $1 \leq n < R$ ,  
 obtenues en marginalisant  $\mathbf{A}^R$ .
- **Loi initiale :**  $\pi$ ,  $\pi_j = p(X_1 = j)$ .

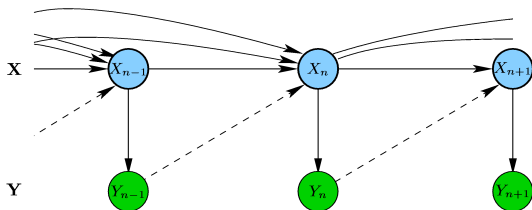
$$p(\mathbf{x}) = \pi_{x_1} \prod_{n=1}^{R-1} a_{x_{n+1} | \mathbf{x}_{1:n}}^n \prod_{n=R}^{N-1} a_{x_{n+1} | \mathbf{x}_{n-R+1:n}}^R,$$

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi_{x_1} f_{x_1}(y_1) \prod_{n=1}^{R-1} a_{x_{n+1} | \mathbf{x}_{1:n}}^n f_{x_{n+1}}(y_{n+1}) \prod_{n=R}^{N-1} a_{x_{n+1} | \mathbf{x}_{n-R+1:n}}^R f_{x_{n+1}}(y_{n+1})$$

# Modèle CMC $_{R-S}$

## Hypothèse H3

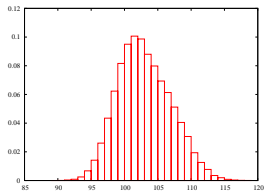
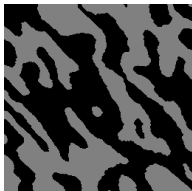
[H3 bis] La distribution de chaque  $Y_n$  conditionnellement à  $\mathbf{X}$  est égale à sa distribution conditionnellement à  $\{X_{n-S+1}, \dots, X_n\}$ , avec  $S \leq R$ .



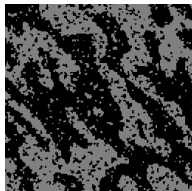
Modèle CMC $_{3-2}$

- ▶  $f_{\mathbf{x}_{n-S+1:n}}(y_n) = p(y_n | \mathbf{x}_{n-S+1:n})$   
 $K^S$  lois d'attache aux données 1D.

# Simulation/Restauration

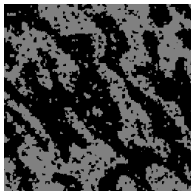


CMC<sub>1-1</sub>



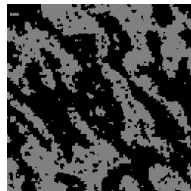
$\tau = 13.82\%$ ,  $t = 9s$

CMC<sub>2-2</sub>



$\tau = 12.11\%$ ,  $t = 20s$

CMC<sub>3-3</sub>



$\tau = 10.60\%$ ,  $t = 42s$

# Exemple

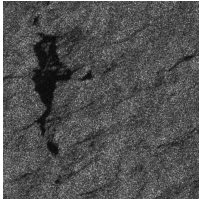
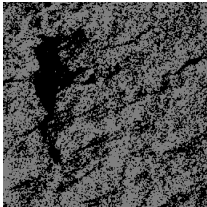
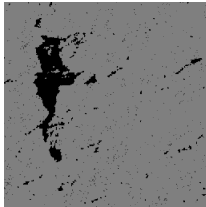


Image ERS-RSO d'une nappe  
d'hydrocarbure au large des côtes  
égyptiennes.

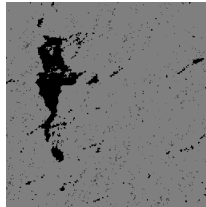
CMC<sub>1-1</sub>



CMC<sub>2-2</sub>



CMC<sub>3-3</sub>



# Où en sommes-nous ?

- 1 Chaîne de Markov Cachées et Extensions
  - Le modèle original
  - Extension vectorielle
  - Extension floue
- 2 Autres topologies de CMC
  - CMC d'ordre  $R - S$
  - Chaîne de Markov Couple
- 3 Vers d'autres modèles...

## Modèle CMC couple

$\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  est une chaîne de Markov stationnaire.

$$p(\mathbf{z}) = p(z_1) \prod_{n=1}^{N-1} p(z_{n+1} | z_n).$$

### Loi stationnaire

- Loi initiale :

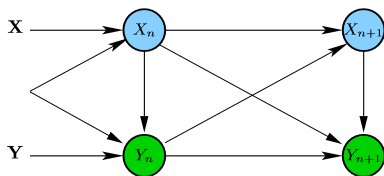
$$a_{z_1} = p(z_1) = \sum_{x_2 \in \Omega} \int p(z_1, z_2) dy_2 = \sum_{x_2 \in \Omega} p(x_1, x_2) f_{x_1, x_2}(y_1).$$

- Loi stationnaire :

$$a_{z_2 | z_1} = p(z_2 | z_1) = \frac{p(z_1, z_2)}{p(z_1)}.$$

avec  $p(z_1, z_2) = p(x_1, x_2) \underbrace{p(y_1, y_2 | x_1, x_2)}_{f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)}$

## Structure de dépendance



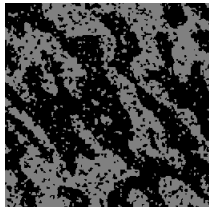
$$p(z_{n+1} | z_n) = \\ p(x_{n+1} | z_n) p(y_{n+1} | z_n, x_{n+1})$$

### Prise en compte du bruit

- Le bruit dépend des deux états précédents :  $f_{x_1, x_2}(y_2)$   
(H3 :  $p(y_n | \mathbf{x}) = p(y_n | x_n) = f_{x_n}(y_n)$ ).
- Lois d'attache aux données adaptées aux transitions de classes :  $f_{x_1, x_2}(y_1, y_2)$ .
- Modèles : ACP/ACI, copules.

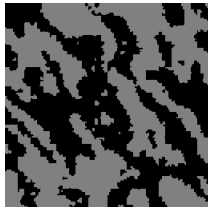
# Restaurations - copules avec marges gaussiennes

Copule produit



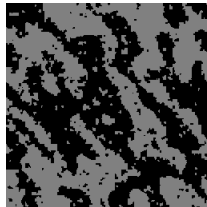
$\tau = 13.80\%$ ,  $t = 67s$

Copule gaussienne

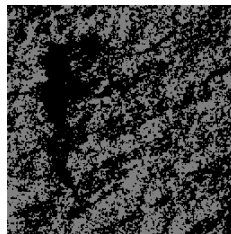
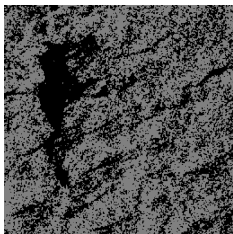


$\tau = 7.60\%$ ,  $t = 83s$

Copule log. de Gumbel



$\tau = 10.04\%$ ,  $t = 70s$



## Vers d'autres modèles...

- Les modèles **CMC Triplet** introduisent un 3<sup>e</sup> processus « auxiliaire »  $\mathbf{U} = \{U_1, \dots, U_N\}$ ,  $U_n \in \Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_L\}$ , de telle sorte que le triplet  $\mathbf{T} = (\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y})$  est une CMC stationnaire. *cf.* W. Pieczynski.  
⇒ Modèle non stationnaire (**modèle semi-markovien** : bruits à longue dépendance)
- Modèles de **CMC couple flou** ou **CMC triplet flou** : prise en compte de transitions floues entre les frontières des classes.